Grundzüge

der

algebraischen Analysis.

Als Leitfaden bei öffentlichen Vorträgen und zum Selbststudium.

Von

Dr. J. Dienger,

Professor der Mathematik an der polytechnischen Schule zu Karlsruhe.

Karlsruhe,
Druck und Verlag der G. Braun'schen Hofbuchhandlung.

1851.

Vorwort und Einleitung.

Das vorliegende Buch ist zunächst dazu bestimmt, meinen Vorträgen in der zweiten Klasse der hiesigen polytechnischen Schule zu Grunde gelegt zu werden. Da ich ein Buch, wie es mir die hiesigen Bedürfnisse zu fordern schienen und das meinen Ansichten entsprach, nicht kannte, so entschloß ich mich zur Herausgabe desselben. Ich habe in der ersten Abtheilung so entschieden, als es mir möglich war, die Untersuchungen über die Konvergenz oder Divergenz der betrachteten Reihen durchzuführen gesucht, da nach meiner Ansicht divergente Reihen ein für alle Male unbedingt zu verwerfen sind. Zwar hat man erst dieser Tage wieder versucht, diese Todten neu zu beleben, allein ein durch Galvanismus erregtes Zucken der Glieder ist eben kein wirkliches Leben. Sodann glaube ich auch, gerade durch diese fortwährende Hinweisung auf die Schranken, außerhalb welcher das Nachgewiesene keine Geltung mehr hat, jenem gedankenlosen Formelmachen entgegen getreten zu sein, das nur zu gerne für tiefsinnige Mathematik sich ausgibt. Wenn man meint, der Allgemeinheit der Mathematik geschehe durch ein solches Eingränzen und Beschränken Eintrag, so heißt Dies eben, von der Mathematik mehr verlangen, als sie ihrer Natur nach geben kann, eine Sache, die bekanntlich selbst Zauberern nicht möglich ist. Gerade diese scharfe Scheidung und Eingränzung scheint mir eines der Hauptverdienste der neuern Methode zu sein, da erst dadurch der denkende Geist zur Gewißheit und somit zur wissenschaftlichen Beruhigung gelangt, indem er vollkommen sicher ist, in wie weit er das Instrument, dessen er sich bedient, anwenden darf oder nicht. Um ein Beispiel zu wählen, wollen wir nur die binomische Formel betrachten. Es gibt Gelegenheiten, da man dieselbe als „allgemein giltig" beweist, also ohne vorherige Einschränkung setzt:

$$(a+b)^m = a^m + m\,a^{m-1}b + \frac{m(m-1)}{1.2}a^{m-2}b^2 + \dots$$

Wie nun, wenn dem Zuhörer oder Leser einfällt, von den so schön bewiesenen Dingen Gebrauch zu machen und zu seiner Uebung einmal $m = -1$, $a = 1$, $b = 2$ zu setzen, so daß er erhält

$$\frac{1}{3} = 1 - 2 + 4 - 8 + 16 - 32 + 64 \; \ldots \; ?$$

Daß dergleichen Dinge, über die ich hier nicht weiter sprechen will, bei der Betrachtung nicht vorkommen können, die in dem vorliegenden Buche durchzuführen gesucht worden ist, wird man sich ohne Mühe überzeugen.

Was den Inhalt anbetrifft, so habe ich in der ersten Abtheilung den Stoff so sehr zusammengedrängt, als es mir möglich war, da es meine Absicht war, bloß die Grundzüge dieses Zweiges der mathematischen Wissenschaften zu entwickeln und die Eintheilung des hiesigen Unterrichts ausführlichere Betrachtungen kaum möglich machen dürfte. Ohnehin glaube ich, deren genug gegeben zu haben, um zum Studium der Differential- und Integralrechnung zu befähigen, die unmittelbar auf diesen Kursus folgt. Ich habe deßwegen im letzten Abschnitt der ersten Abtheilung eine Reihe Betrachtungen aufgenommen, die eine unmittelbare Einleitung zu jenen höhern Zweigen bilden können. Daß ich die Differenzenrechnung mit aufgenommen habe, wird nicht zum Vorwurfe gereichen, da sie doch wohl hieher gehört und namentlich die Summirungsmethoden verallgemeinert und zugleich vermehrt. Daß ich nicht Alles von derselben aufnahm, findet einerseits darin seine Entschuldigung, daß ich mich bei der Abfassung immer an Das halten mußte, was in dem vorgezeichneten Kursus durchgeführt werden kann, anderseits die schwereren Theile besser später vorgetragen werden. Was zum Verständniß der nächsten Anwendungen auf Summirung und Interpolation nothwendig ist, glaube ich angegeben zu haben.

Eben so habe ich die Betrachtung der Bernoullischen Zahlen weggelassen, da dieselben einerseits in diesen Theilen der Mathematik noch recht wohl entbehrlich sind, anderseits durch die Methoden der höhern Mathematik weit bequemer und einfacher gegeben werden können.

Die Betrachtung der trigonometrischen Funktionen, in so weit dies in der ersten Abtheilung nicht vollständig geschah, ist im Anhange ergänzt worden.

Daß bei einem schon vielfach behandelten Gegenstande das Bestehende benützt wurde, ist von vorn herein klar; ich habe es deßhalb unterlassen, irgend wo Namen aufzuführen, da es nicht meine Aufgabe war, eine Geschichte der Wissenschaft zu schreiben, und ich davon sehr wenigen Nutzen für den Leser ersehe. Uebrigens ist die Methode der Behandlung des größten Theils der ersten Abtheilung dieselbe, wie ich sie in einigen Abhandlungen im Crelle'schen Journal und im Grunert'schen Archiv über dieselben Gegenstände angewendet habe.

In der zweiten Abtheilung habe ich die Theorie der algebraischen Gleichungen ausführlicher behandelt, als dies häufig zu geschehen pflegt. Ich halte Dies für nothwendig, um bei den Anwendungen, die davon in der höhern Mathematik gemacht werden, die Theorie als abgeschlossen ansehen zu dürfen, und ich diesen Abschluß der Theorie auch, ohne Rücksicht darauf, an und für sich für nothwendig halte, da die Auflösungsmethoden ohne denselben nie völlige Klarheit geben werden. In dem fünften Abschnitt der zweiten Abtheilung habe ich den Sturm'schen Satz ausführlich betrachtet und die Trennung der reellen Wurzeln bloß auf ihn gegründet, ohne die übrigen, zu diesem Zwecke entdeckten Sätze auch nur zu erwähnen. Man mag darin vielleicht einen Mangel finden, namentlich daß der so einfache Descartes'sche Satz nicht aufgeführt wurde; da aber von all diesen Sätzen der Sturm'sche der einzige ist, der in allen Fällen sicher zum Ziele führt, so schien es mir genügend, diesen, aber dafür auch ganz vollständig, durchzuführen. Den Leser, der sich für die übrigen Sätze interessirt, verweise ich auf eine vortreffliche Abhandlung von Moigno im Journal de Mathématiques von Liouville (Mars 1840).

Zur wirklichen Auffindung der reellen Wurzeln habe ich im sechsten Abschnitt die Horner'sche Methode (philosophical transactions, 1819) angewendet, und glaube, dieselbe so dargestellt zu haben, daß man in allen Fällen, wenn man die frühern Lehren zu Hilfe nimmt, sich wird helfen können.

Die Bestimmung der imaginären Wurzeln habe ich unterlassen, weil ich Dies für den mir gesteckten Zweck nicht für nothwendig hielt. Eben so habe ich die weitern Theoreme über die Gleichungen, über Elimination u. s. w. nicht aufgeführt, da sonst der Umfang zu be-

trächtlich geworden wäre. Den für diese Untersuchungen sich interessirenden Leser verweise ich auf: Cours d'Algèbre supérieure, professé à la faculté des Sciences de Paris; par J. A. Serret. (Paris, 1849.), wo er diese Untersuchungen vereinigt findet. Was etwa davon in der höhern Mathematik nothwendig ist, kann ja dort leicht nachgeholt werden, und ein Lehrbuch, das für den Unterricht bestimmt ist, soll, meiner Ansicht nach, nicht darauf Anspruch machen wollen, alle Einzelheiten zu enthalten, da seine Aufgabe vielmehr die ist, die Grundsätze zu entwickeln, auf denen das Weitere aufzubauen ist.

Im Anhange habe ich auch die allgemeine Auflösung eines Systems von n Gleichungen des ersten Grades mit n Unbekannten nach Grunert gegeben, da gerade diese allgemeine Auflösung für sehr viele Anwendungen (ich verweise z. B. auf die allgemeinen Sätze in der Methode der kleinsten Quadrate) nothwendig ist. Eben so habe ich die Fourier'sche Auflösungsmethode der algebraischen Gleichungen kurz angegeben, es dem Leser überlassend, ob er sich dieser, oder der früher auseinander gesetzten bedienen will.

Da das Buch auch zum Selbstunterricht bestimmt ist, so dürften einige, allerdings im ersten Kursus unserer Studierenden vorgekommene Punkte hier noch kurz zu berühren sein. Die folgenden mögen für das Verständniß des Buches genügen.

I. Wenn von negativen Winkeln die Rede ist, so sind ihre trigonometrischen Funktionen bekanntlich der Art, daß $\sin(-a) = -\sin a$, $\cos(-a) = \cos a$, $\operatorname{tg}(-a) = -\operatorname{tg} a$, $\operatorname{cotg}(-a) = -\operatorname{cotg} a$. Deßgleichen, wenn von den trigonometrischen Funktionen negativer Bögen (Zahlen) die Rede ist.

II. Unter dem Zeichen $\operatorname{arc}(\sin = x)$ verstehen wir den dem Zahlwerthe nach kleinsten Bogen (für den Halbmesser = 1, Seite 12), dessen Sinus x ist. Soll dieser Bogen reell sein, so muß $x^2 \overline{\overline{<}} 1$. So ist $\operatorname{arc}\left(\sin = \frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$; natürlich kann er also auch als bloße Zahl aufgefaßt werden. Aehnliches gilt für die Zeichen $\operatorname{arc}(\cos = x)$, $\operatorname{arc}(\operatorname{tg} = x)$, nur für $\operatorname{arc}(\operatorname{cotg} = x)$ wollen wir die Bestimmung ein wenig anders treffen, wie es die folgende Uebersicht lehrt. Es sei nämlich:

$\text{arc}(\sin = x)$ zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und 0 bei negativem x, zwischen 0 und $+\frac{\pi}{2}$ bei positivem x,

$\text{arc}(\cos = x)$ zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ bei positivem x, zwischen $\frac{\pi}{2}$ und π bei negativem x,

$\text{arc}(\text{tg} = x)$ zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und 0 bei negativem x, zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ bei positivem x,

$\text{arc}(\text{cotg} = x)$ zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ bei positivem x, zwischen $\frac{\pi}{2}$ und π bei negativem x.

Was die allgemeinen Werthe dieser Größen anbelangt, so ist ein Bogen, dessen Sinus x ist, nicht nur gleich $\text{arc}(\sin = x)$, sondern auch $\pi - \text{arc}(\sin = x)$, ja allgemein $\text{arc}(\sin = x) + 2n\pi$, $\pi - \text{arc}(\sin = x) + 2n\pi$, wo n eine beliebige ganze, positive oder negative, Zahl ist.

Ein Bogen, dessen Cosinus x ist, ist nicht nur $\text{arc}(\cos = x)$, sondern auch $-\text{arc}(\cos = x)$, und allgemein $\text{arc}(\cos = x) + 2n\pi$, $-\text{arc}(\cos = x) + 2n\pi$, n wie so eben.

Ein Bogen, dessen Tangente gleich x ist, ist nicht nur $\text{arc}(\text{tg} = x)$, sondern auch $\text{arc}(\cos = x) + n\pi$; eben so ein Bogen, dessen Cotangente x ist, ist im Allgemeinen $\text{arc}(\text{cotg} = x) + n\pi$.

III. Sei die Summe $\text{arc}(\sin = x) + \text{arc}(\sin = z)$ zu finden. Sei $\text{arc}(\sin = x) = X$, $\text{arc}(\sin = z) = Z$, so ist offenbar

$$\sin(X + Z) = \sin X \cos Z + \cos X \sin Z = x\sqrt{1 - z^2} + z\sqrt{1 - x^2},$$

da cos Z und cos X nothwendig positiv sind. Also ist

$$X + Z = \text{arc}(\sin = x\sqrt{1 - z^2} + z\sqrt{1 - x^2}),$$

wenn X+Z nicht über $\frac{\pi}{2}$, oder unter $-\frac{\pi}{2}$ ist. Ist X+Z über $\frac{\pi}{2}$, so ist offenbar

$$X + Z = \pi - \text{arc}(\sin = x\sqrt{1 - z^2} + z\sqrt{1 - x^2});$$

ist X+Z unter $-\frac{\pi}{2}$, so ist

$$X + Z = -\pi - \text{arc}(\sin = x\sqrt{1 - z^2} + z\sqrt{1 - x^2}),$$

da dies die nächst kleineren Bögen sind, deren Sinus gleich $x\sqrt{1-z^2}+z\sqrt{1-x^2}$.

Damit aber $X+Z$ zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $+\frac{\pi}{2}$ sei, muß $\cos(X+Z)$ positiv sein, d. h.

$$\cos X \cos Z - \sin X \sin Z = \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-z^2} - xz > 0.$$

Wenn x und z beide positiv sind, so wird daraus folgen:

$$(1-x^2)(1-z^2) > x^2z^2,\ 1-(x^2+z^2)+x^2z^2 > x^2z^2,\ x^2+z^2 < 1.$$

$X+Z$ liegt nicht innerhalb jener Gränzen, wenn $\cos(X+Z)$ negativ, also $\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-z^2}-xz<0$ ist, und zwar wird $X+Z$ über $\frac{\pi}{2}$ liegen, wenn x und z beide positiv, unter $-\frac{\pi}{2}$, wenn x und z beide negativ sind. Also ist

$$\text{arc}(\sin=x)+\text{arc}(\sin=z)$$

$=\text{arc}(\sin=x\sqrt{1-z^2}+z\sqrt{1-x^2})$, wenn $\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-z^2}>xz$,

$=\pi-\text{arc}(\sin=x\sqrt{1-z^2}+z\sqrt{1-z^2})$, wenn $\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-z^2}<xz$, x und z positiv,

$=-\pi-\text{arc}(\sin=x\sqrt{1-z^2}+z\sqrt{1-x^2})$, wenn $\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-z^2}<xz$, x und z negativ.

Eben so ist $\sin(X-Z)=\sin X\cos Z-\cos X\sin Z=x\sqrt{1-z^2}-z\sqrt{1-x^2}$, also

$$X-Z=\text{arc}(\sin=x\sqrt{1-z^2}-z\sqrt{1-x^2}),$$

wenn $X-Z$ zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $+\frac{\pi}{2}$, d. h. wenn $\cos(X-Z)$ positiv, oder $\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-z^2}+xz>0$, u. s. w. Also:

$$\text{arc}(\sin=x)-\text{arc}(\sin=z)$$

$=\text{arc}(\sin=x\sqrt{1-z^2}-z\sqrt{1-x^2})$, wenn $\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-z^2}>-xz$,

$=\pi-\text{arc}(\sin=x\sqrt{1-z^2}-z\sqrt{1-x^2})$, wenn $\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-z^2}<-xz$, x positiv, z negativ,

$=-\pi-\text{arc}(\sin=x\sqrt{1-z^2}-z\sqrt{1-x^2})$, wenn $\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-z^2}<-xz$, x negativ, z positiv.

IV. Sei $\text{arc}(\cos=x)=X$, $\text{arc}(\cos=z)=Z$, so ist

$$\cos(X+Z)=\cos X\cos Z-\sin X\sin Z=xz-\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-z^2},$$

also

$$X+Z=\text{arc}(\cos=xz-\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-z^2}),$$

wenn nicht $X+Z$ über π geht, d. h. wenn nicht $\sin(X+Z)$ negativ ist. Aber

$$\sin(X+Z)=\sin X\cos Z+\cos X\sin Z=z\sqrt{1-x^2}+x\sqrt{1-z^2},$$

also muß $z\sqrt{1-x^2}+x\sqrt{1-z^2}<0$ sein;

in diesem Falle ist $X+Z=2\pi-\text{arc}(\cos=xz-\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-z^2})$. Also

$$\text{arc}(\cos=x)+\text{arc}(\cos=z)$$

$=\text{arc}(\cos=xz-\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-z^2})$, wenn $z\sqrt{1-x^2}+x\sqrt{1-z^2}>0$,
$=2\pi-\text{arc}(\cos=xz-\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-z^2})$, wenn $z\sqrt{1-x^2}$
$+x\sqrt{1-z^2}<0$.

Für $z\sqrt{1-x^2}+x\sqrt{1-z^2}=0$ ist der Sinus 0, also der Bogen 0 oder π, wo man nun das letztere wählen muß, da die Summe zweier Bogen: $\text{arc}(\cos=x)+\text{arc}(\cos=z)$ nie Null wird. Also kann man dann eine oder die andere dieser Formeln anwenden (wie dies ähnlich in III. statt hat).

Eben so ist

$$\cos(X-Z)=\cos X\cos Z+\sin X\sin Z=xz+\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-z^2},$$

also

$$X-Z=\text{arc}(\cos=xz+\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-z^2}),$$

wenn $X-Z$ zwischen 0 und π ist, d. h. wenn $\sin(X-Z)>0$ oder $z\sqrt{1-x^2}-x\sqrt{1-z^2}>0$.

Ueber π kann die Differenz $X-Z$ sein; ist sie unter 0, so ist

$$X-Z=-\text{arc}(\cos=xz+\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-z^2}),$$

also ist

$$\text{arc}(\cos=x)-\text{arc}(\cos=z)$$

$=\text{arc}(\cos=xz+\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-z^2})$, wenn $z\sqrt{1-x^2}-x\sqrt{1-z^2}>0$,
$=-\text{arc}(\cos=xz+\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-z^2})$, wenn $z\sqrt{1-x^2}-$
$x\sqrt{1-z^2}<0$.

Für $z\sqrt{1-x^2}-x\sqrt{1-z^2}=0$, d. h. $x=z$ geben beide Formeln 0.

V. Sei $\text{arc}(tg=x)=X$, $\text{arc}(tg=z)=Z$, so ist

$$tg(X+Z)=\frac{tgX+tgZ}{1-tgX\,tgZ}=\frac{x+z}{1-xz},$$

also

$$X+Z=\text{arc}\left(tg=\frac{x+z}{1-xz}\right),$$

wenn X+Z zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $+\frac{\pi}{2}$ liegt, d. h. wenn $\cos(X+Z)>0$, oder $\cos X \cos Z > \sin X \sin Z$, d. h. $1 > \operatorname{tg} X \operatorname{tg} Z$, $1 > xz$. Liegt X+Z über $\frac{\pi}{2}$, so ist

$$X+Z=\pi+\operatorname{arc}\left(\operatorname{tg}=\frac{x+z}{1-xz}\right),$$

alsdann ist $\cos(X+Z)<0$, also $1<xz$, während x und z positiv sind; liegt X+Z unter $-\frac{\pi}{2}$, so ist wieder $1<xz$, aber x und z negativ, dann ist

$$X+Z=-\pi+\operatorname{arc}\left(\operatorname{tg}=\frac{x+z}{1-xz}\right).$$

Also ist

$$\operatorname{arc}(\operatorname{tg}=x)+\operatorname{arc}(\operatorname{tg}=z)=\operatorname{arc}\left(\operatorname{tg}=\frac{x+z}{1-xz}\right), \text{ wenn } xz<1,$$

$$=\pi+\operatorname{arc}\left(\operatorname{tg}=\frac{x+z}{1-xz}\right), \text{ wenn } xz>1, \text{ x und z positiv.}$$

$$=-\pi+\operatorname{arc}\left(\operatorname{tg}=\frac{x+z}{1-xz}\right), \text{ wenn } xz>1, \text{ x und z negativ.}$$

Für $xz=1$ gelten die erste und zweite, wenn x und z positiv; die erste und dritte, wenn x und z negativ.

Ganz eben so findet sich

$$\operatorname{arc}(\operatorname{tg}=x)-\operatorname{arc}(\operatorname{tg}=z)=\operatorname{arc}\left(\operatorname{tg}=\frac{x-z}{1+xz}\right), \text{ wenn } -xz<1,$$

$$=\pi+\operatorname{arc}\left(\operatorname{tg}=\frac{x-z}{1+xz}\right), \text{ wenn } -xz>1, \text{ x positiv, z negativ,}$$

$$=-\pi+\operatorname{arc}\left(\operatorname{tg}=\frac{x-z}{1+xz}\right), \text{ wenn } -xz>1, \text{ x negativ, z positiv.}$$

VI. Sei $\operatorname{arc}(\operatorname{cotg}=x)=X$, $\operatorname{arc}(\operatorname{cotg}=z)=Z$, so ist

$$\operatorname{cotg}(X+Z)=\frac{\operatorname{cotg}X.\operatorname{cotg}Z-1}{\operatorname{cotg}X+\operatorname{cotg}Z}=\frac{xz-1}{x+z},$$

also

$$X+Z=\text{arc}\left(\text{cotg}=\frac{xz-1}{x+z}\right),$$

wenn $X+Z$ zwischen 0 und π, d. h. wenn $\sin(X+Z)>0$, $\sin X\cos Z+\cos X\sin Z>0$, $\text{cotg}Z+\text{cotg}X>0$, $z+x>0$. Ist $X+Z$ über π, so ist

$$X+Z=\pi+\text{arc}\left(\text{cotg}=\frac{xz-1}{x+z}\right)$$

und dann $x+z<0$, also ist:

$$\text{arc}(\text{cotg}=x)+\text{arc}(\text{cotg}=z)=\text{arc}\left(\text{cotg}=\frac{xz-1}{x+z}\right), \text{ wenn } x+z>0,\ x>-z,$$

$$=\pi+\text{arc}\left(\text{cotg}=\frac{xz-1}{x+z}\right), \text{ wenn } x+z<0,\ x<-z.$$

Ganz eben so:

$$\text{arc}(\text{cotg}=x)-\text{arc}(\text{cotg}=z)=\text{arc}\left(\text{cotg}=\frac{xz+1}{z-x}\right), \text{ wenn } z-x>0,\ z>x,$$

$$=-\pi+\text{arc}\left(\text{cotg}=\frac{xz+1}{z-x}\right), \text{ wenn } z-x<0,\ z<x.$$

VII. Man sieht aus den in II. gegebenen Erklärungen, daß allgemein:

$$\text{arc}(\cos=x)=\frac{\pi}{2}-\text{arc}(\sin=x),$$

$$\text{arc}(\text{cotg}=x)=\frac{\pi}{2}-\text{arc}(\text{tg}=x).$$

Ferner ist aus III. für $x=z$:

$$2\text{arc}(\sin=x)=\text{arc}(\sin=2x\sqrt{1-x^2}), \text{ wenn } 1-x^2>x^2, \text{ d. h. } 2x^2<1,$$

$$=\pi-\text{arc}(\sin=2x\sqrt{1-x^2}), \text{ wenn } 1-x^2<x^2, \text{ d. h. } 2x^2>1 \text{ und } x \text{ positiv},$$

$$=-\pi-\text{arc}(\sin=2x\sqrt{1-x^2}), \text{ wenn } 1-x^2<x^2, \text{ d. h. } 2x^2>1 \text{ und } x \text{ negativ}.$$

Aus IV. folgt für $x=z$:

$$2.\text{arc}(\cos=x)=\text{arc}(\cos=x^2-(1-x^2))=\text{arc}(\cos=2x^2-1), \text{ wenn}$$

$2x\sqrt{1-x^2}>0$, d. h. x positiv.

$=2\pi-\text{arc}(\cos=2x^2-1)$, wenn $x\sqrt{1-x^2}<0$, d. h. x negativ.

Aus V. ergibt sich für $x=z$:

$$2\text{arc}(\text{tg}=x)=\text{arc}\left(\text{tg}=\frac{2x}{1-x^2}\right), \text{ wenn } x^2<1,$$

$$=\pi+\text{arc}\left(\text{tg}=\frac{2x}{1-x^2}\right), \text{ wenn } x^2>1, \text{ und}$$

x positiv,

$$=-\pi+\text{arc}\left(\text{tg}=\frac{2x}{1-x^2}\right), \text{ wenn } x^2>1,$$

und x negativ.

Endlich erhält man aus VI. für $x=z$:

$$2\text{arc}(\text{cotg}=x)=\text{arc}\left(\text{cotg}=\frac{x^2-1}{2x}\right), \text{ wenn x positiv,}$$

$$=\pi+\text{arc}\left(\text{cotg}=\frac{x^2-1}{2x}\right), \text{ wenn x negativ.}$$

Ferner ist ist allgemein

$$\sin\mathbf{X}=\frac{\text{tg}\mathbf{X}}{\sqrt{1+\text{tg}^2\mathbf{X}}}, \text{ also } \mathbf{X}=\text{arc}\left(\sin=\frac{\text{tg}\mathbf{X}}{\sqrt{1+\text{tg}^2\mathbf{X}}}\right).$$

Sei nun $\text{tg}X=x$, also $X=\text{arc}(\text{tg}=x)$, so ist allgemein:

$$\text{arc}(\text{tg}=x)=\text{arc}\left(\sin=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right).$$

Eben so

$$\text{arc}(\text{cotg}=x)=\text{arc}\left(\cos=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right).$$

Umgekehrt ist auch

$$\text{arc}(\sin=x)=\text{arc}\left(\text{tg}=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right),$$

$$\text{arc}(\cos=x)=\text{arc}\left(\text{cotg}=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right).$$

Weiter ist

$$\text{arc}(\sin=\cos v)=\frac{\pi}{2}-v, \text{ v zwischen 0 und } \pi,$$

$$\cos(\cos=\sin v)=\frac{\pi}{2}-v, \text{ v zwischen } -\frac{\pi}{2} \text{ und } +\frac{\pi}{2},$$

$$\text{arc}(\text{tg}=\text{cotg}\, v)=\frac{\pi}{2}-v, \text{ v zwischen 0 und } \pi,$$

$$\text{arc}(\text{cotg}=\text{tg v})=\frac{\pi}{2}-\text{v},\ \text{v zwischen } -\frac{\pi}{2} \text{ und } \frac{\pi}{2},$$

$$\text{arc}(\sin=-\cos \text{v})=\text{v}-\frac{\pi}{2},\ \text{v zwischen 0 und } \pi,$$

$$\text{arc}(\cos=-\sin \text{v})=\text{v}+\frac{\pi}{2},\ \text{v zwischen } -\frac{\pi}{2} \text{ und } \frac{\pi}{2},$$

$$\text{arc}(\text{tg}=-\text{cotg v})=\text{v}-\frac{\pi}{2},\ \text{v zwischen 0 und } \pi,$$

$$\text{arc}(\text{cotg}=-\text{tg v})=\text{v}+\frac{\pi}{2},\ \text{v zwischen } -\frac{\pi}{2} \text{ und } \frac{\pi}{2}.$$

Sei $\text{arc}(\sin=\text{x})=\text{v}$, also $\text{x}=\sin \text{v}$, so ist $\frac{1+\sqrt{1-\text{x}^2}}{\text{x}}=\frac{1+\cos \text{v}}{\sin \text{v}}$ $=\frac{2\cos^2\frac{1}{2}\text{v}}{2\sin\frac{1}{2}\text{v}\cos\frac{1}{2}\text{v}}=\text{cotg}\,\frac{1}{2}\text{v}$. Ist nun x positiv, so liegt v zwischen 0 und $\frac{1}{2}\pi$, also ist

$$\text{arc}\left(\text{tg}=\text{cotg}\,\frac{1}{2}\text{v}\right)=\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\text{v},\ \text{arc}\left(\frac{1+\sqrt{1-\text{x}^2}}{\text{x}}\right)=\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\,\text{arc}(\sin=\text{x}),\ \text{also } \text{arc}(\sin=\text{x})=\pi-2\,\text{arc}\left(\text{tg}=\frac{1+\sqrt{1-\text{x}^2}}{\text{x}}\right),\ \text{x}>0.$$

Eben so ist $\frac{\sqrt{1-\text{x}^2}}{\text{x}}=\frac{\cos \text{v}}{\sin \text{v}}=\text{cotg v}$. Ist also $\text{x}>0$, so ist

$$\text{arc}(\text{tg}=\text{cotg v})=\frac{\pi}{2}-\text{v},\ \text{d. h.:}$$

$$\text{arc}\left(\text{tg}=\frac{\sqrt{1-\text{x}^2}}{\text{x}}\right)=\frac{\pi}{2}-\text{arc}(\sin=\text{x}),\ \text{x}>0.$$

Aehnliche Formeln können leicht weitere gebildet werden.

Setzt man in V. $\text{z}=\frac{1}{\text{x}}$, so ist

$$\text{arc}(\text{tg}=\text{x})+\text{arc}\left(\text{tg}=\frac{1}{\text{x}}\right)=\text{arc}(\text{tg}=\infty)=\frac{\pi}{2},\ \text{wenn x}>0,$$

$$=\text{arc}(\text{tg}=-\infty)=-\frac{\pi}{2},\ \text{wenn x}<0.$$

Deßgleichen aus VI.:

$$\mathrm{arc}(\mathrm{cotg}=x)+\mathrm{arc}\left(\mathrm{cotg}=\frac{1}{x}\right)=\frac{\pi}{2}, \text{ wenn } x>0,$$

$$=\frac{3\pi}{2}, \text{ wenn } x<0.$$

Ist tg $\mathbf{X}=x$, so ist $\frac{1}{x}=\mathrm{cotg}\,\mathbf{X}$, also $\mathbf{X}=\mathrm{arc}(\mathrm{tg}=x)$,

$\mathbf{X}=\mathrm{arc}\left(\mathrm{cotg}=\frac{1}{x}\right)$, mithin

$$\mathrm{arc}(\mathrm{tg}=x)=\mathrm{arc}\left(\mathrm{cotg}=\frac{1}{x}\right), \text{ jedoch nur für } x>0.$$

U. s. w.

Schließlich bitte ich, folgende, bei sorgfältiger Korrektur dennoch übersehene, allerdings unwichtige Druckfehler verbessern zu wollen.

Seite 16, überall statt a_1: a_0, und statt a_2: a_1.
" 24, Zeile 9, statt 1α: $1-\alpha$.
" 25, " 11 v. u., statt des ersten a_1: a_0.
" 27, " 19, statt des ersten v_1: v_0, und statt des ersten u_1: u_0.
" 31, " 8 v. u., statt III.: II.
" 37, " 5, fehlt) am Ende.
" 60, " 8, statt m—4): (m—4).
" 61, " 13, statt $\sin^2$: $\sin^2\alpha$.
" 79, " 1, " und: um.
" 88, " 11, " x: π.
" 88, " 12, " x: π.
" 93, " 5 v. u., statt y^n: y_n.
" 93, " 9, statt $\varDelta)x$: $\varDelta x)$.
" 93, " 10, " $\varDelta x)$: $\varDelta x$.
" 94, " 24, " $\varDelta n$: $\varDelta x$.
" 134, " 5, muß) vor dem Worte „Zahl" stehen.

Ein ausführliches Inhaltsverzeichniß befindet sich am Ende des Buches.

Karlsruhe, im März 1851.

J. Dienger.

Erste Abtheilung.

Elemente der Analysis.

Erster Abschnitt.

Der binomische Satz.

I. Man findet durch gewöhnliche Multiplikation, daß

$$(1+z)^1 = 1+z,$$
$$(1+z)^2 = (1+z)\,(1+z) = 1+2z+z^2,$$
$$(1+z)^3 = (1+z)^2.\,(1+z) = 1+3z+3z^2+z^3,$$
$$(1+z)^4 = (1+z)^3.\,(1+z) = 1+4z+6z^2+4z^3+z^4,$$
$$(1+z)^5 = (1+z)^4.\,(1+z) = 1+5z+10z^2+10z^3+5z^4+z^5,$$

u. s. f.

Achtet man aufmerksam auf das Gesetz, das in diesen Bildungen obwaltet, so ist es nicht schwer, daraus zu schließen, daß man haben werde, wenn n eine ganze, positive Zahl ist:

$$(1+z)^n = 1+\frac{n}{1}z+\frac{n(n-1)}{1.\;2}z^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{1.\;2.\;3}z^3+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.\;2.\;3.\;4}z^4+\ldots.+\frac{n(n-1)\ldots 1}{1.\,2.\ldots n}z^n$$

wenigstens ist oben:

$$(1+z)^2 = 1+\frac{2}{1}z+\frac{2.1}{1.2}z^2,$$

$$(1+z)^3 = 1+\frac{3}{1}z+\frac{3.2}{1.2}z^2+\frac{3.2.1}{1.2.3}z^3,$$

$$(1+z)^4 = 1+\frac{4}{1}z+\frac{4.3}{1.2}z^2+\frac{4.3.2}{1.2.3}z^3+\frac{4.3.2.1}{1.2.3.4}z^4,$$

$$(1+z)^5 = 1+\frac{5}{1}z+\frac{5.4}{1.2}z^2+\frac{5.4.3}{1.2.3}z^3+\frac{5.4.3.2}{1.2.3.4}z^4+\frac{5.4.3.2.1}{1.2.3.4.5}z^5,$$

so daß das in der Formel (1) ausgesprochene Gesetz vollkommen richtig ist, in so ferne $n=2,3,4,5$. Ich behaupte nun, daß wenn die

Formel (1) wahr ist für einen Werth r von n, sie auch wahr sei für den folgenden Werth r + 1 von n. Denn gesetzt, man wisse, daß:

$$(1+z)^r = 1+\frac{r}{1}z+\frac{r(r-1)}{1.\,2}z^2+\ldots\ldots+\frac{r(r-1)\,(r-2)\ldots1}{1.\;2.\;3.\ldots.\,r}z^r, \qquad (2)$$

so ist offenbar

$$(1+z)^{r+1} = (1+z)\Big(1+\frac{r}{1}z+\frac{r(r-1)}{1.\,2}z^2+\frac{r(r-1)\,(r-2)}{1.\,2.\,3}z^3+\ldots\ldots+$$

$$\frac{r(r-1)\,(r-2)\ldots.\,2}{1.\;2.\;3\ldots\ldots..\,r}z^{r-1}+\frac{r(r-1)\ldots.}{1.\;2\ldots r}\;z^r\Big) =$$

$$1+\frac{r}{1}z+\frac{r(r-1)}{1.\,2}z^2+\frac{r(r-1)\,(r-2)}{1.\;2.\;3}z^3+\ldots\ldots+\frac{r(r-1)\ldots1}{1.\;2\ldots r}z^r+$$

$$1z+\frac{r}{1}z^2+\frac{r(r-1)}{1.\,2}z^3+\ldots+\frac{r(r-1)\,(r-2)\ldots2}{1.\;2\ldots\ldots(r-1)}z^r+\frac{r(r-1)\ldots1}{1.\;1\ldots r}z^{r+1}$$

Zählt man die gleichen Potenzen von z zusammen, so erhält man, indem man beachtet, daß

$$\frac{r}{1}+1=\frac{r+1}{1},$$

$$\frac{r(r-1)}{1.\,2}+\frac{r}{1}=\frac{r}{1}\left(\frac{r-1}{2}+1\right)=\frac{r}{1}\left(\frac{r-1+2}{2}\right)=\frac{(r+1)r}{1.\,2},$$

$$\frac{r(r-1)\,(r-2)}{1.\;2.\;\;3}+\frac{r(r-1)}{1.\,2}=\frac{r(r-1)}{1.\,2}\left(\frac{r-2}{3}+1\right)$$

$$=\frac{r(r-1)}{1.\,2}\left(\frac{r-2+3}{3}\right)=\frac{(r+1)r.(r-1)}{1.\;2.\;3},$$

$$\vdots$$

$$\frac{r(r-1)\,(r-2)\ldots1}{1.\;2\ldots\ldots..\;r}+\frac{r(r-1)\ldots2}{1.\,2\ldots(r-1)}=\frac{r(r-1\ldots2}{1.2\ldots(r-1)}\left(\frac{1}{r}+1\right)$$

$$=\frac{r(r-1)\ldots2}{1.2\ldots(r-1)}\left(\frac{1+r}{r}\right)=\frac{(r+1)r.(r-1)\;\ldots\ldots\ldots\;2}{1.\;2\;\ldots\ldots\ldots\ldots\;r},$$

$$\frac{r(r-1)\,(r-2)\ldots1}{1.\;2\;\ldots\ldots\ldots\;r}\ \text{offenbar} = \frac{(r+1)r(r-1)\ldots..\,1}{1.\;2.\;3\quad(r+1)};$$

$$(1+z)^{r+1} = 1+\frac{r+1}{1}z+\frac{(r+1)r}{1.\,2}z^2+\frac{(r+1)r(r-1)}{1.\;2.\;3}z^3+\ldots\ldots\ldots$$

$$+\frac{(r+1)r(r-1)\ldots2}{1.\;2\;\ldots\ldots\ldots\;r}z^r+\frac{(r+1)r(r-1)\ldots.\,1}{1.\;2.\;3\ldots(r+1)}z^{r+1} \quad (3)$$

Dies ist aber genau Das, was die Formel (1) gibt, wenn man in ihr n = r + 1 setzt. Es folgt somit, daß wenn diese Formel für n = r gilt, d. h. wenn (2) richtig ist, dieselbe auch für n = r + 1 gelte, da ja dann (3) auch unzweifelhaft wahr ist.

Nun haben wir oben gesehen, daß die Formel (1) richtig ist für $n = 1, 2, 3, 4, 5$, sie ist es, nach dem so eben Gezeigten, also auch für $n = 6$; und wenn sie nun für $n = 6$ wahr ist, so muß sie es auch für $n = 7$ sein, folglich auch für $n = 8$ u. s. w. D. h. man hat für jedes ganze, positive n:

$$(1+z)^n = 1 + \frac{n}{1}z + \frac{n(n-1)}{1.2}z^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}z^3 + \ldots\ldots + \frac{n(n-1)(n-2)\ldots\ldots 1}{1.2\ldots\ldots\ldots\ldots n}z^n, \quad (1)$$

welche Formel der binomische Satz genannt werden mag.

II. Setzt man in der Formel (1) $z = \pm 1$, so erhält man für jedes ganze, positive n:

$$1 + \frac{n}{1} + \frac{n(n-1)}{1.2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} + \ldots + \frac{n(n-1)(n-2)\ldots 1}{1.2.3\ldots\ldots n} = (1+1)^n = 2^n,$$

$$1 - \frac{n}{1} + \frac{n(n-1)}{1.2} - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} + \ldots (-1)^n \frac{n(n-1)\ldots 1}{1.2\ldots n} = (1-1)^n = 0. \quad (4)$$

Setzt man ferner $z = \frac{b}{a}$ und multiplizirt dann beiderseits mit a^n, indem man beachtet, daß $a^n\left(1+\frac{b}{a}\right)^n = \left(a(1+\frac{b}{a})\right)^n = (a+b)^n$, so findet sich:

$$(a+b)^n = a^n + \frac{n}{1}a^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{1.2}a^{n-2}b^2 + \ldots + b_n, \quad (5)$$

indem ja immer $\frac{n(n-1)(n-2)\ldots 1}{1.2.3\ldots n} = 1$ ist.

III. Die Koeffizienten $\frac{n}{1}, \frac{n(n-1)}{1.2}, \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}, \ldots$ heißen Binomialkoeffizienten und spielen eine ziemlich wichtige Rolle in der Analysis. Sie sind deßwegen weiter untersucht worden und man hat mehrere wichtige Sätze über sie aufgestellt, von denen für unsern Zweck nur der folgende nachgewiesen werden soll. Zuerst aber mag noch bemerkt werden, daß, insoferne als wir diese Koeffizienten für sich betrachten, n irgend eine beliebige Zahl sein darf, und nicht blos eine ganze, positive.

Ich behaupte nun, daß, was auch m und n seien, wenn nur r eine ganze positive Zahl ist, immer:

$$\frac{(m+n)(m+n-1)(m+n-2)\ldots(m+n-r+1)}{1.\ 2.\ 3\ldots\ldots r} = \frac{m(m-1)\ldots(m-r+1)}{1.\ 2\ldots\ldots r} + \frac{n}{1}\cdot\frac{m(m-1)\ldots(m-r+2)}{1.\ 2\ldots\ldots(r-1)} + \frac{n(n-1)}{1.\ 2}\cdot\frac{m(m-1)\ldots(m-r+3)}{1.\ 2\ldots\ldots(r-2)} +$$

$$\ldots\ldots + \frac{n(n-1)\ldots(n-r+1)}{1.\ 2\ \ldots\ldots\ r}, \qquad (6)$$

sei.

Zunächst wird man sich leicht überzeugen, daß der Satz für $r=1,2$ richtig ist. Denn man hat für $r=1$:

$$\frac{m+n}{1} = \frac{m}{1} + \frac{n}{1},$$

für $r=2$: $\frac{(m+n)(m+n-1)}{1.\ 2} = \frac{m(m-1)}{1.\ 2} + \frac{n}{1} \cdot \frac{m}{1} + \frac{n(n-1)}{1.\ 2}$,

wie man durch Multiplikation findet. Gesetzt nun, der in (6) ausgesprochene Satz sei für $r=s$ wahr, so wird er es auch für $r=s+1$ sein. Denn man hat, der Annahme nach:

$$\frac{(m+n)(m+n-1)\ldots(m+n-s+1)}{1.\ \ 2\ \ldots\ldots\ (s)} = \frac{m(m-1)\ldots(m-s+1)}{1.\ 2\ \ldots\ldots\ s}$$
$$+ \frac{n}{1} \cdot \frac{m(m-1)\ldots(m-s+2)}{1.\ 2\ \ldots\ (s-1)} + \ldots \frac{n(n-1)\ldots(n-s+1)}{1.\ 2\ \ldots\ldots\ s},$$

multiplizirt man beiderseits mit $\frac{m+n-s}{s+1}$, so wird man leicht erhalten:

$$\frac{(m+n)(m+n-1)\ldots(m+n-s)}{1.\ \ 2\ \ldots\ldots\ (s+1)} =$$
$$\frac{m-s}{s+1} \cdot \frac{m(m-1)\ldots(m-s+1)}{1.\ 2\ \ldots\ldots\ s}$$
$$+ \frac{n}{s+1} \cdot \frac{m(m-1)\ldots(m-s+1)}{1.\ 2\ \ldots\ldots\ s}$$
$$+ \frac{m-s+1}{s+1} \cdot \frac{n}{1} \cdot \frac{m(m-1)\ldots(m-s+2)}{1.\ 2\ \ldots\ (s-1)}$$
$$+ \frac{(n-1)\,n}{s+1\ \ 1} \cdot \frac{m(m-1)\ldots(m-s+2)}{1.\ 2\ \ldots\ s-1}$$
$$+ \frac{m-s+2}{s+1} \cdot \frac{n(n-1)}{1.\ 2} \frac{m(m-1)\ldots(m-s+3)}{1.\ \ 2\ \ldots\ s-2}$$
$$+ \frac{n-2}{s+1} \cdot \frac{n(n-1)}{1.\ 2} \frac{m(m-1)\ldots(m-s+3)}{1.\ 2\ \ldots\ s-2}$$
$$+ \ldots\ldots$$
$$\vdots$$
$$+ \frac{m}{s+1} \frac{n(n-1)\ldots(n-s+1)}{1.\ 2\ \ldots\ldots\ s}$$
$$+ \frac{n-s}{s+1} \cdot \frac{n(n-1)\ldots(n-s+1)}{1.\ 2\ \ldots\ldots\ s}$$

Zieht man nun die zweite und dritte, vierte und fünfte u. s. f. dieser Linien zusammen, so erhält man, wenn man beachtet, daß:

$$\frac{n}{s+1}\cdot\frac{m(m-1)\ldots(m-s+1)}{1.2\ldots\ldots s}+\frac{m-s+1}{s+1}\cdot\frac{n}{1}\,\frac{m(m-1)\ldots(m-s+2)}{1.2\ldots\ldots s-1}$$

$$=\frac{m(m-1)\ldots(m-s+1)}{1.2\ldots\ldots(s-1)}\,\frac{n}{1}\cdot\left(\frac{1}{s}+1\right)\cdot\frac{1}{s+1}$$

$$=\frac{n}{1}\cdot\frac{m(m-1)\ldots(m-s+1)}{1.2\ldots\ldots s};\ \frac{(n-1)}{s+1}\cdot\frac{n}{1}\cdot\frac{m(m-1)\ldots\ldots(m-s+2)}{1.2\ldots\ldots s-1}$$

$$+\frac{(m-s+2)}{s+1}\cdot\frac{n(n-1)}{1.2}\,\frac{m(m-1)\ldots\ldots(m-s+3)}{1.2\ldots\ldots s-2}$$

$$=\frac{n(n-1)}{s+1}\cdot\frac{m(m-1)\ldots(m-s+2)}{1.2\ldots\ldots(s-2)}\left(\frac{1}{s-1}+\frac{1}{2}\right)$$

$$=\frac{n(n-1)}{1.2}\cdot\frac{m(m-1)\ldots(m-s+2)}{1.2\ldots\ldots s-1}$$

$$\vdots$$

$$\frac{(n-s)}{s+1}\cdot\frac{n(n-1)\ldots(n-s+1)}{1.2\ldots\ldots s}=\frac{n(n-1)\ldots(n-s)}{1.2\ldots\ldots s+1}:$$

$$\frac{(m+n)(m+n-1)\ldots(m+n-s)}{1.2\ldots\ldots\ldots\ldots s+1}=\frac{m(m-1)\ldots(m-s)}{1.2\ldots\ldots s+1}$$

$$+\frac{n}{1}\cdot\frac{m(m-1)\ldots(m-s+1)}{1.2.\ldots\ldots s}+\frac{n(n-1)}{1.2}\cdot\frac{m(m-1)\ldots(m-s+2)}{1.2\ldots\ldots s-1}+\ldots$$

$$+\ldots\ldots+\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-s)}{1.2\ldots\ldots\ldots\ldots s+1}.$$

Da Dies aber genau die Formel (6) ist, wenn man in ihr $r=s+1$ setzt, so folgt, in ähnlicher Weise, wie unter I., daß dieselbe gilt für jedes ganze, positive r. Man wird bemerken, daß m und n ganz willkührlich sind.

IV. Die Größe $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ nähert sich, wenn m größer und größer wird, einer gewissen Zahl (Gränze), die wir nun aufsuchen wollen.

Sei zunächst m eine ganze, positive Zahl, so ist nach (1), wenn $z=\frac{1}{m}$, $n=m$:

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m=1+\frac{m}{1}\cdot\frac{1}{m}+\frac{m(m-1)}{1.2}\cdot\frac{1}{m^2}+\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}\,\frac{1}{m^3}+\ldots$$

$$=1+1+\frac{1}{1.2}\left(1-\frac{1}{m}\right)+\frac{1}{1.2.3}\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)+\ldots$$
$$=2+\frac{1}{1.2}\left(1-\frac{1}{m}\right)+\frac{1}{1.2.3}\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)+\ldots,$$

wie man leicht sieht. Da nun die Größen $1-\frac{1}{m}$, $1-\frac{2}{m}$, ... alle positiv und < 1 sind, indem die erste $1-\frac{1}{m}$, die letzte $1-\frac{m-1}{m}$ ist, so ist also immer

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m>2.$$

Aber $1-\frac{1}{m}<1$, $\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)<1$, ... also ist

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m<2+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{1.2.3.4}+\ldots$$

also um so mehr

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m<2+\frac{1}{2}+\frac{1}{2.2}+\frac{1}{2.2.2}+\ldots$$

d. h. kleiner, als 2+1 oder 3, da bekanntlich

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots=1,$$

wenn man die Reihe ins Unbegränzte fortsetzt*). Der Werth von $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$, wie groß auch m sei, ist also immer zwischen 2 und 3. Nimmt man m sehr groß, z. B. = 1000,000,000,000, so kann man die wahre Gränze annäherungsweise bestimmen. Man findet so, daß $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ sich mit unbegränzt wachsendem ganzen m der Zahl 2·718281828459 . . . nähert, welche Zahl inskünftig mit e bezeichnet werden soll.

---

*) Es folgt dies aus der Lehre von den geometrischen Reihen. Es ist nämlich:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots+\frac{1}{2^n}=\frac{\frac{1}{2^{n+1}}-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}-1}=\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{2^{n+1}}}{\frac{1}{2}}$$

und, da mit unbegränzt wachsendem n die Größe $\frac{1}{2^{n+1}}$ verschwindet, so ist die Summe $=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}=1$ für ein unbegränzt (unendlich) großes n.

Gesetzt nun, das positive, unbegränzt wachsende m sei nicht ganz, sondern zwischen den zwei ganzen Zahlen n und n + 1 enthalten, so daß $m = n + \alpha = n + 1 - \beta$, wo α und β zwischen 0 und 1 enthalten sind. Alsdann ist offenbar $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ seinem Werth nach immer zwischen den Werthen von $\left(1+\frac{1}{n}\right)^m = \left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)^{\frac{m}{n}} =$

$\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)^{1+\frac{\alpha}{n}}$ und $\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^m = \left(\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n\ 1}\right)^{n-\frac{\beta}{n+1}}$

enthalten, und zwar immer kleiner als das erste, und größer als das zweite. Wächst nun m unbegränzt, so muß auch n (also auch $n+1$) unbegränzt zunehmen; da aber alsdann $\frac{\beta}{n}$ und $\frac{\beta}{n+1}$ unbegränzt kleiner werden, d. h. der Null so nahe kommen als man will; ferner $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, $\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$, nach dem Frühern, da n eine ganze, positive Zahl ist, sich der Zahl e nähern, so nähern sich also $\left(1+\frac{1}{n}\right)^m$ und $\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^m$ beide der Zahl e, folglich auch das immer zwischen ihnen liegende $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$.

Ist endlich m negativ, hat man also $\left(1-\frac{1}{m}\right)^{-m}$ zu untersuchen, so sei $1 - \frac{1}{m} = \frac{1}{1+a}$, da ja $1 - \frac{1}{m} < 1$ ist. Wächst nun m unbegränzt, so muß a eben so unbegränzt der Null sich nähern, d. h. kleiner werden. Nun folgt $m = \frac{1+a}{a}$, also $\left(1-\frac{1}{m}\right)^{-m} =$

$\left(\frac{1}{1+a}\right)^{-\frac{1+a}{a}} = \frac{1}{\left(\frac{1}{1+a}\right)^{\frac{1+a}{a}}} = \left(1+a\right)^{\frac{1+a}{a}} = \left(1+a\right)^{1+\frac{1}{a}}$. Sei nun $a = \frac{1}{r}$, also $\frac{1}{a} = r$, so wird r unbegränzt wachsen mit abnehmendem a, d. h. mit wachsendem m, und es ist $\left(1-\frac{1}{m}\right)^{-m} =$

$\left(1+\frac{1}{r}\right)^{1+r}$, welches letztere aber nach dem Obigen sich der Gränze e nähert, folglich auch $\left(1-\frac{1}{m}\right)^{-m}$.

Daraus folgt nun, daß, was auch m sei (positiv oder negativ), immer $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ mit unbegränzt wachsendem m sich der Zahl e nähert.

V. Die Größe $\left(1+\frac{x}{m}\right)^m = \left(1+\frac{1}{r}\right)^{rx} = \left(\left(1+\frac{1}{r}\right)^r\right)^x$, wenn $m = rx$, nähert sich folglich mit unbegränzt wachsendem m, d. h. eben solchem r, der Größe e^x.

VI. Läßt man in der Formel

$$\left(1+\frac{x}{m}\right)^m = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2}\left(1-\frac{1}{m}\right) + \frac{x^3}{1.2.3}\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right) + \ldots\ldots\ldots$$

die aus (1) folgt, wenn man $z = \frac{x}{m}$ setzt, m schrankenlos zunehmen, so werden die einzelnen Glieder sich offenbar immer mehr den Gliedern der Reihe

$$1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^3}{1.2.3}+\ldots\ldots$$

nähern, wenn diese letztere Reihe ebenfalls unbegränzt fortgesetzt wird.

Es ist dies zunächst klar bei allen denjenigen Gliedern der ersten Reihe, die nicht sehr weit vom Anfang abstehen. Betrachtet man aber eines der letzteren, so ist etwa das entsprechende Glied der zweiten Reihe $\frac{x^n}{1.2\,..\,n}$. Da nun die Glieder der letztern Reihe immer größer sind, als die der ersten, das Glied $\frac{x^n}{1.2\,..\,n}$ bei sehr großem n aber verschwindend klein sein wird, indem $\frac{x^n}{1\,..\,n} = \frac{x}{1}\cdot\frac{x}{2}\cdot\frac{x}{3}\cdots\frac{x}{n}$ und $\frac{x}{n}$ verschwindend klein ist, bei sehr großem n, so wird um so mehr das entsprechende Glied der ersten Reihe verschwindend klein sein. Der Unterschied beider einander entsprechenden Glieder wird also gleichfalls verschwinden, d. h. man wird eines für das andere

setzen können. Daraus folgt dann, daß, weil $\left(1+\frac{x}{m}\right)^m$ sich der Größe e^x nähert,

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \dots \quad (6)$$

was auch x sei. Wir werden diesen wichtigen Satz bald nochmals nachweisen, ohne uns auf obige Betrachtungen zu stützen.

Für $x = 1$ folgt hieraus:

$$e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \dots \quad (7)$$

wodurch e berechnet (und gegeben) wird.

Zweiter Abschnitt.

Die imaginären Formen.

I. Sucht man die Quadratwurzel aus einer negativen Zahl, also z. B. $\sqrt{-5}$, so stößt man auf eine neue Form von Zahlen, die man nicht durch positive, noch durch negative Zahlen auszudrücken vermag. Wir wollen solche Zahlen **imaginäre Zahlen** heißen. Die Form $\sqrt{-5}$ kann auch durch $\sqrt{5}\,\sqrt{-1}$ dargestellt werden; allgemein $\sqrt{-a} = \sqrt{a}\,\sqrt{-1}$. Bezeichnen wir $\sqrt{-1}$ ein für alle Male mit i, so ist also $\sqrt{-a} = \sqrt{a}.\,i$ und die Form $b\,i$ drückt eine **rein imaginäre Zahl** aus. Ihr Quadrat ist $-b^2$, so wie $i^2 = -1$.

Man sieht leicht, daß

$$i^2 = -1,\ i^3 = -i,\ i^4 = +1,\ i^5 = i,\ \dots\ i^{4n} = +1,$$
$$i^{4n+1} = i,\ i^{4n+2} = -1,\ i^{4n+3} = -i.$$

Die Zahlen 5, — 5, . . . sollen, im Gegensatz hiezu, **reelle Zahlen** heißen. Sind nun a und b reelle Zahlen, so ist $a + b\,i$ eine **gemischt imaginäre (komplexe) Zahl**. Sie ist reell, wenn $b = o$, rein imaginär, wenn $a = o$. So ist also $\sqrt{3} + \sqrt{7}.\,i = \sqrt{3} + \sqrt{-7}$ eine gemischt imaginäre Zahl.

II. Die Form $a + b\,i$ kann umgestaltet werden. Setzt man

$$a = r\cos\alpha,\; b = r\sin\alpha, \qquad (1)$$

worin r eine durchaus positive Zahl sein soll, so ist $a \pm b\,i = r(\cos\alpha \pm i\sin\alpha)$, und zur Bestimmung von r und α zieht man aus (1):

a) indem man von beiden Gleichungen die Quadrate nimmt, und addirt:

$$a^2 + b^2 = r^2(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) = r^2, \text{ also}$$

$$r = +\sqrt{a^2 + b^2}.$$

b) Alsdann ist $\cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{a}{r}$, $\sin\alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{b}{r}$,

wodurch α ohne alle Zweideutigkeit bestimmt ist.

So ist

$$4 \pm 3i = 5(\cos 36^0 52' 12'' \pm i\sin 36^0 52' 12''), \text{ oder auch}$$

$$4 - 3i = 5\left[\cos(-36^0 52' 12'') + i\sin(-36^0 52' 12'')\right],$$

$$-4 \pm 3i = 5(\cos 143^0 7' 48'' \pm i\sin 143^0 7' 48''),$$

$$-4 - 3i = 5\left[\cos(-143^0 7' 48'') + i\sin(-143^0 7' 48'')\right];$$

ist allgemein $a + b\,i = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$, so ist $a - b\,i =$

$$r(\cos\alpha - i\sin\alpha) = r\left(\cos(-\alpha) + i\sin(-\alpha)\right).$$

Man findet leicht:

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos\beta + i\sin\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta + i(\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta) = \cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta)$$

und daraus:

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)^2 = (\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos\alpha + i\sin\alpha) = \cos 2\alpha + i\sin 2\alpha,$$

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)^3 = (\cos 2\alpha + i\sin 2\alpha)(\cos\alpha + i\sin\alpha) = \cos 2\alpha \,.\, \cos\alpha - \sin 2\alpha\sin\alpha + i(\cos 2\alpha \,.\, \sin\alpha + \sin 2\alpha\cos\alpha) = \cos 3\alpha + i\sin 3\alpha,$$

$$\vdots$$

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)^n = \cos n\alpha + i\sin n\alpha \qquad (2)$$

wenn n eine positive ganze Zahl ist.

Eben so: $(\cos\alpha - i\sin\alpha)^n = \left(\cos(-\alpha) + i\sin(-\alpha)\right)^n = \cos(-n\alpha) + i\sin(-n\alpha) = \cos(n\alpha) - i\sin(n\alpha)$.

Ferner ist

$$(\cos n\alpha + i\sin n\alpha)(\cos n\alpha - i\sin n\alpha) = \cos^2 n\alpha + \sin^2 n\alpha + i(\sin n\alpha\cos n\alpha - \sin n\alpha\cos n\alpha) = 1$$

$$(\cos\alpha - i\sin n\alpha) = \frac{1}{\cos n\alpha + i\sin n\alpha} = \frac{1}{(\cos\alpha + i\sin\alpha)^n} = (\cos\alpha + i\sin\alpha)^{-n}.$$

also ist auch für ein negatives ganzes n:

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)^n = \cos n\alpha + i\sin n\alpha, \qquad (3)$$
$$(\cos\alpha - i\sin\alpha)^n = \cos n\alpha - i\sin n\alpha.$$

da $-i\sin n\alpha = i\sin(-n\alpha)$, $\cos n\alpha = \cos(-n\alpha)$.

Daraus folgt, daß

$$\frac{\cos\alpha + i\sin\alpha}{\cos\beta + i\sin\beta} = (\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos\beta - i\sin\beta)$$
$$= \cos(\alpha - \beta) + i\sin(\alpha - \beta).$$

Also

$$(a + b\,i)(c + d\,i) = r\,r_1\left(\cos(\alpha + \alpha_1) + i\sin(\alpha + \alpha_1)\right)$$

wenn $a + b\,i = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$

$c + d\,i = r_1(\cos\alpha_1 + i\sin\alpha_1)$.

$$\frac{a + b\,i}{c + d\,i} = \frac{r}{r_1}\left(\cos(\alpha - \alpha_1) + i\sin(\alpha - \alpha_1)\right).$$

Zugleich folgt aus (3) und (2):

$$\frac{(\cos\alpha + i\sin\alpha)^n + (\cos\alpha - i\sin\alpha)^n}{2} = \cos n\alpha,$$
$$\frac{(\cos\alpha + i\sin\alpha)^n - (\cos\alpha - i\sin\alpha)^n}{2\,i} = \sin n\alpha.$$

III. Hat man irgend eine Gleichung

$$a + b\,i = c + d\,i,$$

so muß nothwendig $a = c$, $b = d$ sein. Sonst folgte aus dieser Gleichung:

$$i = \frac{c - a}{b - d},$$

d. h. gleich einer reellen Zahl, was nicht möglich ist.

IV. Ist n eine positive ganze Zahl, so folgt aus der Formel (5) des ersten Abschnitts:

$$(a + b\,i)^n = a^n + n\,a^{n-1}\,b\,i - \frac{n(n-1)}{1.2}\,a^{n-2}\,b^2 - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\,a^{n-3}\,b^3\,i + \ldots$$
$$= a^n - \frac{n(n-1)}{1.2}\,a^{n-2}\,b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}\,a^{n-4}\,b^4 - \ldots$$
$$+ i\left[n\,a^{n-1}\,b - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\,a^{n-3}\,b^3 + \ldots\right].$$

Also wenn $a = \cos\alpha$, $b = \sin\alpha$, und man das in III. und II. Gesagte beachtet, für ein ganzes, positives n:

$$\cos n\alpha = \cos^n \alpha - \frac{n(n-1)}{1.2} \cos^{n-2}\alpha \sin^2\alpha + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4} \cos^{n-4}\alpha \sin^4\alpha - \ldots,$$

$$\sin n\alpha = n \cos^{n-1}\alpha \sin\alpha - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} \cos^{n-3}\alpha \sin^3\alpha + \ldots \quad (4)$$

Diese Reihen werden fortgesetzt, bis sie von selbst abbrechen. Daraus folgt:

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha,$$
$$\cos 3\alpha = \cos^3\alpha - 3\cos\alpha \sin^2\alpha,$$
$$\cos 4\alpha = \cos^4\alpha - 6\cos^2\alpha \sin^2\alpha + \sin^4\alpha,$$

.
.
.

$$\sin 2\alpha = 2\cos\alpha \sin\alpha,$$
$$\sin 3\alpha = 3\cos^2\alpha \sin\alpha - \sin^3\alpha,$$
$$\sin 4\alpha = 4\cos^3\alpha \sin\alpha - 4\cos\alpha \sin^3\alpha.$$

V. In der Analysis ist es nun nicht weiter gebräuchlich, die Winkel in Graden, Minuten u. s. f. zu bestimmen, vielmehr geschieht diese Bestimmung lediglich durch die Länge des zu dem betrachteten Winkel gehörigen Kreisbogens, dessen Halbmesser = 1 ist. Die Länge des zu einem Winkel von 90^0 gehörigen solchen Bogens ist bekanntlich $= \frac{\pi}{2}$, wenn mit π die Zahl 3·14159265 . . . bezeichnet wird. Also ist die Länge des zu einem Winkel von a Graden gehörenden Bogens $= \frac{\pi . a}{2.90}$; heißt diese Länge α, so ist also $\alpha = \frac{\pi a}{180}$ und daraus $a = \frac{180 . \alpha}{\pi}$, so daß dadurch auch die Grade eines Winkels bestimmt werden, wenn man seine zugehörige Bogenlänge kennt. Es ist klar, daß diese Einführung an den Formeln der Trigonometrie Nichts ändert, daß also z. B. $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, ob α in Graden, oder durch einen Bogen gegeben sei.

Der Bogen tritt nun als bloße Zahl auf, und es ist dies auch der Grund, warum in der Analysis diese Weise gebräuchlich ist. Sprechen wir also inskünftig etwa von sin 36·5, so heißt Dies nicht der Sinus von 36·5 Graden, sondern der Sinus von einem Winkel, dessen zugehöriger, dem Halbmesser 1 entsprechender Bogen 36·5 ist, welcher Winkel also in Graden $\frac{180}{\pi} . 36{\cdot}5$ ist.

Also ist

$$\sin\frac{\pi}{2} = 1,\ \cos\frac{\pi}{2} = 0,\ \sin\pi = 0,\ \cos\pi = -1,$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha,\ \ldots$$

$$\sin 2\,r\,\pi = 0,\ \cos 2\,r\,\pi = 1,\ \sin(2\,r + 1)\,\pi = 0,$$

$$\cos(2\,r + 1)\,\pi = -1,$$

$\sin\frac{r\,\pi}{2} = 0$, wenn r gerade, $= (-1)^{\frac{r-1}{2}}$, wenn r ungerade; $\cos\frac{r\,\pi}{2} = 0$, wenn r ungerade, $= (-1)^{\frac{r}{2}}$, wenn r gerade u. s. w.

Man wird nun auch leicht geometrisch nachweisen können, daß wenn $\alpha < \frac{\pi}{2}$:

$$\sin\alpha < \alpha,\ \mathrm{tg}\,\alpha > \alpha$$

sei.

Dritter Abschnitt.

Bestimmung einer Funktion aus gegebener Eigenschaft.

I. Eine jede Größe, die so beschaffen ist, daß sie ihren Werth ändert, wenn eine andere denselben ändert, und jene Aenderung eine Folge der letzteren ist, heißt eine Funktion dieser letzteren Größe, welche füglich Stammgröße heißen kann. So sind also x^5, $\sin x$, .. Funktionen von x. Aendert sich die Stammgröße nur um ein außerordentlich Kleines, und ist die daraus folgende Aenderung der Funktion eben so beschaffen, so heißt die Funktion eine stetige. So ist x^2 eine stetige Funktion von x, weil, wenn x um h zunimmt, wobei dann x^2 um $2\,x\,h + h^2$ zunimmt, die Aenderung $2\,h\,x + h^2$ ebenfalls sehr klein ist, wenn h es ist. Eine Funktion, wie z. B. $5\,x^4 + 7\,x^6$,

welche nur ganze, positive Potenzen der Stammgröße enthält, heißt eine ganze Funktion. Man pflegt im Allgemeinen eine Funktion von x durch f (x), F (x), φ (x) . . zu bezeichnen. Man kennt nun oft bestimmte Eigenschaften einer Funktion, durch welche es möglich ist, die Funktion selbst zu bestimmen. Wir wollen davon nur folgende Beispiele aufführen.

II. Gesetzt man solle eine Funktion f (x) von x so bestimmen, daß die Gleichung statt habe:

$$f(x) . f(y) = f(x+y), \quad (1)$$

d. h., daß, wenn man statt x setzt y und das neue Ergebniß mit dem frühern multiplizirt, dasselbe herauskommt, als wenn man statt x gesetzt hätte x + y.

Man setze y = z + u, so ist also

$$f(x) . f(z+u) = f(x+z+u)$$

d. h. wenn man bedenkt, daß ja auch f (z + u) = f (z). f (u):

$$f(x) . f(z) . f(u) = f(x+z+u).$$

Es ist klar, daß man, wenn man so fortgeht, erhält:

$$f(x) . f(z) . f(u) . f(v) \ldots = f(x+z+u+v+\ldots),$$

und wenn man x = z = u = v = . . . = α setzt und die Anzahl dieser Größen m ist:

$$\left(f(\alpha)\right)^m = f(m\alpha) \quad , \quad (2)$$

also für $\alpha = 1$:

$$\left(f(1)\right)^m = f(m),$$

wobei nun f (1) eine bestimmte, ein für alle Male bekannte Größe sein wird, die sich nicht mehr ändert. Sie sei a, so ist also für ein ganzes, positives m:

$$f(m) = a^m. \quad (3)$$

Setzt man aber in (2) $\alpha = \frac{p}{q}$, so erhält man

$$f\left(\frac{mp}{q}\right) = \left(f\left(\frac{p}{q}\right)\right)^m$$

und wenn m = q:

$$f(p) = \left(f\left(\frac{p}{q}\right)\right)^q, \text{ also } f\left(\frac{p}{q}\right) = \left(f(p)\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$= (a^p)^{\frac{1}{q}} = a^{\frac{p}{q}},$$ (da nach (2) für das ganze p:

$$f(p) = a^p)$$

für ganze, positive p und q. Also für positive (ganze oder gebrochene) x: $f(x) = a^x$. (4)

Setzt man in der Grundgleichung (1) $y = -x$, so ist
$$f(x) . f(-x) = f(0)$$
und wenn man in (4) $x = 0$ setzt: $f(0) = a^0$, d. h. $f(0) = 1$, (wie auch aus (1) folgt, wenn $x = y = 0$),

also $$f(x) . f(-x) = 1,\ f(-x) = \frac{1}{f(x)}.$$

Nun ist für jedes positive (reelle) x nach dem Gefundenen: $f(x) = a^x$, also
$$f(-x) = \frac{1}{a^x} = a^{-x},$$
so daß für jedes reelle x: $f(x) = a^x,\ a = f(1)$. (5)

III. Sei f (x) so zu bestimmen, daß
$$f(x+y) = f(x) + f(y) + a. \quad (6)$$
Zunächst findet man, ganz wie so eben:
$$f(n\alpha) = n f(\alpha) + (n-1) a, \quad (7)$$
also für $\alpha = 1$: $f(n) = n f(1) + (n-1) a = n b + (n-1) a$,
$$b = f(1);$$

für $\alpha = \frac{p}{q}$: $f\left(n\frac{p}{q}\right) = n f\left(\frac{p}{q}\right) + (n-1) a$,

also hieraus für $n = q$: $f\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{f(p)}{q} - (q-1)\frac{a}{q} =$

$\frac{bp + (p-1)a}{q} - (q-1)\frac{a}{q}$, (da $f(p) = pb + (p-1)a$), d. h. $f\left(\frac{p}{q}\right) = b.\frac{p}{q} + \left(\frac{p}{q} - 1\right) a$, (8)

demnach für jedes positive (ganze oder gebrochene) x:
$$f(x) = bx + (x-1) a = (a+b) x - a.$$
Läßt man in der vorhergehenden Formel (8) q über alle Gränzen hinaus wachsen (oder $x = 0$, $y = 0$ in (6) werden), so erhält man
$$f(0) = -a, \text{ da dann } \frac{p}{q} \text{ zu Null wird.}$$
Setzt man in der Grundformel (6) $y = -x$, so ist
$$f(0) = f(x) + f(-x) + a = -a,$$
also
$$f(-x) = -f(x) - 2a = -(a+b)x + a - 2a$$
$$= -(a+b)x - a,$$
d. h. folglich für jedes reelle x:
$$f(x) = (a+b) x - a. \quad (9)$$

Vierter Abschnitt.

Bestimmung aus gegebenen Werthen. Interpolation.

I. Verschwindet die Funktion

$$a_1 x^n + a_2 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = y \quad (1)$$

für $x = \alpha$, so ist sie durch $x - \alpha$ ohne Rest theilbar. $a_1, a_2, \ldots a_n$ bedeuten bestimmte, unveränderliche Zahlen (Koeffizienten), n ist eine ganze positive Zahl, x die Stammgröße.

Da, der Annahme nach, y Null ist für $x = \alpha$, so ist also

$$a_1 \alpha^n + a_2 \alpha^{n-1} + \ldots + a_{n-1} \alpha + a_n = 0, \quad (2)$$

also wenn man (2) von (1) abzieht:

$$a_1 (x^n - \alpha^n) + a_2 (x^{n-1} - \alpha^{n-1}) + \ldots$$
$$+ a_{n-1} (x - \alpha) = y.$$

Nun läßt sich im Allgemeinen $x^r - \alpha^r$ durch $x - \alpha$ ohne Rest theilen, und man findet:

$$\frac{x^r - \alpha^r}{x - \alpha} = x^{r-1} + \alpha x^{r-2} + \alpha^2 x^{r-3} + \ldots + \alpha^{r-1},$$

also läßt sich jedes Glied von y, also y selbst durch $x - \alpha$ ohne Rest theilen. Der Quotient enthält wieder lauter ganze Potenzen von x, und zwar die höchste ist x^{n-1}. Verschwindet y ferner für $x = \beta$, so läßt es sich also ebenfalls durch $x - \beta$ ohne Rest dividiren u. s. f. Da aber y sich durch $x - \alpha$ dividiren läßt, so muß nothwendig $x-\alpha$ ein Faktor von y sein, d. h. man muß haben

$$y = (x-\alpha)(a_1 x^{n-1} + \ldots + b_{n-1}). \quad (3)$$

Da ferner y sich durch $x-\beta$ ohne Rest theilen läßt, so muß y auch den Faktor $x-\beta$ enthalten, und da nun in (3) man $x-\alpha$ nicht ohne Rest durch $x-\beta$ (β nicht $= \alpha$) theilen kann, so muß $a_1 x^{n-1} + \ldots + b_{n-1}$ sich durch $x-\beta$ ohne Rest theilen lassen, d. h. $y = (x-\alpha)(x-\beta)(a_1 x^{n-2} + \ldots + c_{n-2})$ sein. Geht man so fort, so sieht man ein, daß wenn y Null wird für die n Werthe $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ von x, man haben muß:

$$y = a_1 (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma) \ldots$$

Wenn y zu Null wird für $x = \alpha, \beta, \gamma, \ldots$, so pflegt man zu sagen: $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ seien **Wurzeln** der Gleichung $y = 0$. Läßt sich y durch den Faktor $x-\alpha$ mehrmals dividiren, so ist auch α eben so vielmal Wurzel der Gleichung $y = 0$.

II. Gesetzt nun, es sei uns die Aufgabe gestellt, eine ganze Funktion y von x zu bestimmen, so daß sie für die n bestimmten Werthe $x_1, x_2, \ldots x_n$ von x die ebenfalls bestimmten Werthe $y_1, y_2, \ldots y_n$ annehme, d. h. daß wenn $x = x_1$, auch $y = y_1$ u. s. f. sei.

Man nehme an, es sei, wenn $p_1, p_2, \ldots p_n$ gewisse ganze Funktionen von x so einfach als möglich sind:

$$y = p_1 y_1 + p_2 y_2 + \ldots + p_n y_n,$$

so wird man leicht einsehen, daß diese Form genügen wird, wenn im Allgemeinen p_r so bestimmt wird, daß es $= 1$ wird, wenn $x = x_r$, und Null für alle andern Werthe von x, nämlich für $x = x_1, x_2, \ldots x_{r-1}, x_{r+1}, \ldots x_n$. Man sieht nämlich, daß dann aus (4) folgt für $x = x_1$: $y = y_1$, für $x = x_2$: $y = y_2$ u. s. w., wie verlangt wurde.

Vergleicht man aber das in I. Gesagte, so wird man finden, daß also

$$p_r = k\,(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_{r-1})(x - x_{r+1})\ldots(x - x_n). \quad (5)$$

Die Größe k bestimmt sich durch die Bedingung, daß für $x = x_r$, $p_r = 1$ werden muß. Man findet folglich:

$$1 = k\,(x_r - x_1)(x_r - x_2)\ldots(x_r - x_{r-1})(x_r - x_{r+1})\ldots(x_r - x_n),$$

$$k = \frac{1}{(x_r - x_1)(x_r - x_2)\ldots(x_r - x_{r-1})(x_r - x_{r+1})\ldots(x_r - x_n)},$$

also endlich

$$p_r = \frac{(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_{r-1})(x - x_{r+1})\ldots(x - x_n)}{(x_r - x_1)(x_r - x_2)\ldots(x_r - x_{r-1})(x_r - x_{r+1})\ldots(x_r - x_n)}. \quad (6)$$

Setzt man Dies in (4), so ergibt sich:

$$y = \frac{(x - x_2)(x - x_3)\ldots(x - x_n)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)\ldots(x_1 - x_n)}\,y_1 + \frac{(x - x_1)(x - x_3)\ldots(x - x_n)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)\ldots(x_2 - x_n)}\,y_2 + \ldots + \frac{(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_{n-1})}{(x_n - x_1)(x_n - x_2)\ldots(x_n - x_{n-1})}\,y_n. \quad (7)$$

Diese Funktion enthält als höchste Potenz x^{n-1}, d. h. sie ist vom Grade $n-1$. Man sieht leicht ein, wenn man das in I. Gesagte mit (5) vergleicht, daß die Größen $p_1, p_2, \ldots$ von keinem niederern Grade sein können, als $n-1$, d. h. also überhaupt y von keinem niederern Grade sein kann als $n-1$. Wohl aber könnte y von höherm Grade sein als $n-1$.

Gesetzt nämlich, es sei $r < n$, und es solle für $x = x_1, x_2, \ldots x_r$ bezüglich $y = y_1, y_2, \ldots y_r$ sein, so würde man, ganz wie so eben, eine ganze Funktion vom Grade $r-1$ finden können, die diesen Bedingungen genügte; allein die oben bestimmte Größe (7), die von hö-

herm Grade als r—1 (nämlich n—1 > r—1) ist, genügt diesen Bedingungen auch, freilich auch noch weitern.

Man schließt aus dem so eben Gesagten, daß die ganze Funktion y, welche den oben gestellten Bedingungen genügen soll, mindestens vom Grade n—1 sein muß.

III. Hat man zwei ganze Funktionen vom Grade n—1:

$$a x^{n-1} + b x^{n-2} + \dots + p$$

und

$$a' x^{n-1} + b' x^{n-2} - \dots + p'$$

und es geben dieselben für $x = x_1, x_2, \dots x_n$ dieselben Werthe, so sind sie identisch, d. h. die eine ist genau, was die andere. Denn nach der Annahme würde der Unterschied beider:

$$(a-a') x^{n-1} + (b-b') x^{n-2} + \dots + p-p'$$

Null werden für die n Werthe $x = x_1, x_2, \dots x_n$, d. h. er müßte das Produkt

$$(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)$$

zum Faktor haben, was unmöglich ist, da dieses letztere vom Grade n ist.

IV. Wendet man das eben Gesagte auf die Formel (7) an, so folgt, daß es keine ganze Funktion vom Grade n—1 mehr geben kann, die den gestellten Bedingungen genügt, und von (7) verschieden ist. Weiß man also zum Voraus, daß y eine ganze Funktion vom Grade n—1 sein soll, so wird sie, nach den gestellten Bedingungen, vollständig durch die Formel (7) bestimmt. Soll z. B. eine Funktion y vom Grade 3 bestimmt werden, welche für x = 1, 2, 3, 4 die Werthe y = 6, 8, 10, 12 gebe, so ist

$$y = \frac{(x-2)(x-3)(x-4)}{(1-2)(1-3)(1-4)}6 + \frac{(x-1)(x-3)(x-4)}{(2-1)(2-3)(2-4)}8$$
$$+ \frac{(x-1)(x-2)(x-4)}{(3-1)(3-2)(3-4)}10 + \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(4-1)(4-2)(4-3)}12.$$

Verlangt man nun den Werth von y für irgend einen andern Werth von x, so hat man in der Formel (7) nur diesen Werth von x einzusetzen, und erhält den entsprechenden Werth von y — Alles unter der mehrfach angeführten Voraussetzung, daß y nur vom Grade n—1 (also eine ganze Funktion von x) sein soll. Gesetzt also z. B. man verlange von einer Funktion vom Grade 3, die für x = 2, 4, 6, 8 gibt, y = 10, 20, 30, 40, den Werth für x = 15, so ist dieser Werth:

$$\frac{(15-4)(15-6)(15-8)}{(2-4)(2-6)(2-8)}10 + \frac{(15-2)(15-6)(15-8)}{(4-2)(4-6)(4-8)}20 +$$
$$\frac{(15-2)(15-4)(15-8)}{(6-2)(6-4)(6-8)}30 + \frac{(15-2)(15-4)(15-6)}{(8-2)(8-4)(8-6)}40.$$

Man sieht, daß die Formel (7) für Berechnung mit Logarithmen bequem eingerichtet ist.

V. Wenn eine ganze Funktion vom Grade $n-1$ Null wird für n verschiedene Werthe $x_1, x_2, \ldots x_n$ von x, so ist sie Null für jeden Werth von x, d. h. sie verschwindet. Denn sonst müßte sie (nach I) das Produkt $(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)$ enthalten, was nicht möglich ist.

VI. Seien nun in der Formel (7) $y_1 = y_2 = \ldots = y_n = 1$, so ist also $y-1$ Null für die n verschiedenen Werthe $x_1, x_2, \ldots x_n$ von x, d. h. $y-1$ ist Null für jeden Werth von x, oder man hat, was auch x sei:

$$\frac{(x-x_2)(x-x_3)\ldots(x-x_n)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)\ldots(x_1-x_n)}+\ldots+$$
$$\frac{(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_1)(x_n-x_2)\ldots(x_n-x_{n-1})}=1. \qquad (8)$$

Fünfter Abschnitt.

Von den Reihen. Summirung einiger Reihen.

I. Eine Folge von Zahlen, die nach irgend einem bestimmten Gesetze fortschreitet, heißt eine Reihe, jede einzelne Zahl heißt ein Glied der Reihe. Hört die Zahlenreihe auf, so ist sie endlich, geht sie unbegränzt fort, so ist sie unendlich. Man unterscheidet in jeder Reihe das 1te, 2te, 3te u. s. f. Glied und heißt dann die Zahlen 1, 2, 3, ... die Zeiger (Stellenzeiger) des Gliedes; so ist 20 der Zeiger des 20ten Gliedes u. s. w. Ist der Stellenzeiger allgemein n, so heißt das entsprechende Glied das allgemeine, und man erhält die einzelnen Glieder, wenn man $n = 1, 2, 3, \ldots$ setzt. Durch das allgemeine Glied ist also die ganze Reihe gegeben. Ist z. B. n^2 das allgemeine Glied, so ist die Reihe $1^2, 2^2, 3^2, 4^2, \ldots$. Zählt man die einzelnen Glieder einer Reihe zusammen, so erhält man die Summe dieser Reihe. Geht die Reihe ins Unendliche fort, so wird es sich häufig ereignen, daß die Summe der Reihe nicht angebbar

(unendlich) ist, oder daß sie unbestimmt bleibt. So z. B. würde die ins Unendliche fortlaufende Reihe 1, 2, 3, 4, ... eine nicht angebbare Summe, die Reihe 1, — 1, 1, — 1, 1, — 1, ... eine unbestimmte Summe haben, da die Summe 0 oder 1 ist, je nachdem man mit einem negativen oder einem positiven Glied aufhört. Wir werden im nächsten Abschnitt die unendlichen Reihen noch besonders betrachten. Eine endliche Reihe hat immer eine Summe.

II. Betrachten wir die Reihe

$$1+\frac{a_0-b_0}{b_0}+\frac{a_1-b_1}{b_1}\frac{a_0}{b_0}+\frac{a_2-b_2}{b_2}\frac{a_0\,a_1}{b_0\,b_1}+\ldots$$
$$+\frac{a_n-b_n}{b_n}\cdot\frac{a_0\,a_1\ldots a_{n-1}}{b_0\,b_1\ldots b_{n-1}},$$

so sieht man, daß ihre Summe =

$$1+\left(\frac{a_0}{b_0}-1\right)+\left(\frac{a_1\,a_0}{b_1\,b_0}-\frac{a_0}{b_0}\right)+\left(\frac{a_0\,a_1\,a_2}{b_0\,b_1\,b_2}-\frac{a_0\,a_1}{b_0\,b_1}\right)+\ldots$$
$$+\left(\frac{a_0\,a_1\ldots a_n}{b_0\,b_1\ldots b_n}-\frac{a_0\,a_1\ldots a_{n-1}}{b_0\,b_1\ldots b_{n-1}}\right)=\frac{a_0\,a_1\ldots a_n}{b_0\,b_1\ldots b_n}, \quad (1)$$

da alles Andere sich gegenseitig aufhebt. Diese Formel dient dazu, das Produkt $\frac{a_0\,a_1\ldots a_n}{b_0\,b_1\ldots b_n}$ in eine Reihe zu verwandeln.

Man setze nun $a_0 = a,\ a_1 = a+c,\ \ldots\ a_n = a+nc,$
$b_0 = b,\ b_1 = b+c,\ \ldots\ b_n = b+nc,$

so erhält man also:

$$1+\frac{a-b}{b}+\frac{a-b}{b+c}\cdot\frac{a}{b}+\frac{a-b}{b+2c}\cdot\frac{a(a+c)}{b(b+c)}+\ldots$$
$$\frac{a-b}{b+nc}\cdot\frac{a(a+c)\ldots(a+\overline{n-1}\,c)}{b(b+c)\ldots(b+\overline{n-1}\,c)}=\frac{a(a+c)\ldots(a+nc)}{b(b+c)\ldots(b+nc)} \quad (2)$$

Man setze in dieser Reihe a+c statt a, so ergibt sich:

$$1+\frac{a+c-b}{b}+\frac{a+c-b}{b+c}\cdot\frac{a+c}{b}+\frac{a+c-b}{b+2c}\cdot\frac{(a+c)(a+2c)}{b(b+c)}+\ldots$$
$$+\frac{a+c-b}{b+nc}\cdot\frac{(a+c)(a+2c)\ldots(a+nc)}{b(b+c)\ldots\ldots(b+\overline{n-1}\,c)}=$$
$$\frac{(a+c)(a+2c)\ldots(a+\overline{n+1}\,c)}{b(b+c)\ldots\ldots(b+nc)}.$$

Man dividire beiderseits durch a+c—b, subtrahire $\frac{1}{a+c-b}$ und multiplizire dann mit a, so erhält man:

$$\frac{a}{b}+\frac{a(a+c)}{b(b+c)}+\frac{a(a+c)(a+2c)}{b(b+c)(b+2c)}+\ldots\ldots$$

$$+\frac{a(a+c)(a+2c)\ldots(a+nc)}{b(b+c)(b+2c)\ldots(b+nc)}=$$

$$\frac{a}{a+c-b}\left(\frac{(a+c)(a+2c)\ldots(a+\overline{n+1}c)}{b\quad(b+c)\ldots\quad(b+nc)}-1\right), \quad (3)$$

wobei aber nicht $a+c-b=0$ sein darf, da sonst obige Division nicht zulässig wäre.

Setzt man z. B. $a=1$, $b=2$, $c=2$, so findet sich:

$$\frac{1}{2}+\frac{1.3}{2.4}+\frac{1.3.5}{2.4.6}+\ldots\frac{1.3.5\ldots.(2n+1)}{2.4.6\ldots.(2n+2)}=$$

$$\frac{3.5.7\ldots.(2n+3)}{2.4.6\ldots.(2n+2)}-1. \quad (4)$$

III. Wir wollen in der Reihe (3) n, das ganz und positiv ist, immer größer werden lassen, und untersuchen, zu was die zweite Seite, oder vielmehr das Produkt

$$\frac{(a+c)(a+2c)\ldots(a+\overline{n+1}\,c)}{b(b+c)\ldots\ldots(b+nc)}, \quad (5)$$

wird in diesem Falle.

Nehmen wir $b > a+c$, so ist klar, daß das Produkt (5) kleiner ist als $\frac{a+c}{b}$, da ja alle Brüche $\frac{a+2c}{b+c}, \frac{a+3c}{b+2c}, \ldots$ kleiner sind als 1. Sei darum k die Zahl, der es sich desto mehr nähert, je größer n wird $\left(\text{also } k < \frac{a+c}{b}\right)$, so sieht man ein, daß

$$\frac{a+c}{b}+\frac{(a+c)(a+2c)}{b\quad(b+c)}+\frac{(a+c)(a+2c)(a+3c)}{b\quad(b+c)(b+2c)}+\ldots$$

$$\frac{(a+c)(a+2c)\ldots(a+nc)}{b\quad(b+c)\ldots(b+\overline{n-1}c)}>nk, \quad (6)$$

weil jedes dieser Glieder $> k$ ist. Die Summe dieser Reihe ergibt sich aber aus (3), wenn man dort $a+c$ statt a und $n-1$ statt n setzt; was somit auch n sei, so ist diese Summe immer eine bestimmte, angebbare (endliche) Größe, sobald nämlich $b > a+2c$. Allein aus (6) würde folgen, daß diese Summe mit wachsendem n immer größer würde, da sie $> nk$ ist, vorausgesetzt nämlich, daß $k > 0$. Da dies, nämlich das unbegränzte Wachsen jener Summe, nicht statt hat, so muß folglich $k=0$ sein, d. h. das Produkt (5) wird, wenn n unendlich groß wird, zu Null, sobald nur $b > a+2c$. Läßt man also

in (3) n unendlich groß werden, in welchem Falle die Reihe links zu einer unendlichen wird, so ist ihre Summe $= -\frac{a}{a+c-b}$, d. h. es ist:

$$\frac{a}{b}+\frac{a(a+c)}{b(b+c)}+\frac{a(a+c)\,(a+2c)}{b(b+c)\,(b+2c)}+\ldots=\frac{a}{b-a-c},$$ wenn $b > a+2c$. (7)

Also ist für $b=4$, $a=1$, $c=1$, wobei $b > a+2c$,

$$\frac{1}{4}+\frac{1.2}{4.5}+\frac{1.2.3}{4.5.6}+\ldots=\frac{1}{2}, \quad (8)$$

u. s. f.

Setzt man in (7) $a-c$ für a und dividirt dann durch $a-c$, so erhält man:

$$\frac{1}{b}+\frac{a}{b}\cdot\frac{1}{b+c}+\frac{a(a+c)}{b(b+c)}\cdot\frac{1}{b+2c}+\frac{a(a+c)\,(a+2c)}{b(b+c)\,(b+2c)}\cdot\frac{1}{b+3c}+\ldots=\frac{1}{b-a},$$

$b > a+c$. (9)

Sechster Abschnitt.

Unendliche Reihen. Konvergenz und Divergenz.

(Die Reihe für e^x.)

I. Wenn die Summe der Glieder einer unendlichen Reihe sich desto mehr einer bestimmten, angebbaren Zahl nähert, je mehr Glieder man zusammenfaßt, so heißt die Reihe konvergent, im andern Falle divergent. Die Summe einer divergenten Reihe wäre also unbestimmt oder nicht angebbar (unendlich groß, ∞).

II. Eine wachsende Reihe, d. h. eine solche, deren Glieder immer größer werden, je weiter sie vom Anfang abstehen, ist also nothwendig divergent. So ist die Reihe

$1^2, 2^2, 3^2, \ldots n^2, \ldots$ divergent.

III. Eine fallende Reihe, d. h. eine solche, deren Glieder fortwährend abnehmen, ist, wenn dieselben wechselnde Vorzeichen haben, konvergent.

Denn sei

$$u_0 - u_1 + u_2 - u_3 + u_4 - u_5 + \dots$$

diese Reihe, so ist also $u_1 < u_0$, $u_2 < u_1$, $u_3 < u_2$, ... also da die Reihe auch gleich

$$u_0 - (u_1 - u_2) - (u_3 - u_4) - (u_5 - u_6) - \dots \text{ oder}$$
$$u_0 - u_1 + (u_2 - u_3) + (u_4 - u_5) + \dots,$$

so ist ihre Summe $> u_0 - u_1$ und $< u_0$, also endlich.

So sind die Reihen $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$, $\frac{1}{\sqrt{1}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \dots$ konvergent.

IV. Ist $u_0, u_1, u_2, \dots u_n, \dots$ eine konvergente Reihe, und bedeutet S_n die Summe der n ersten Glieder derselben, so muß, da S_n sich der Summe der Reihe desto mehr nähern muß, je größer n ist, die Summe der bleibenden: $u_n + u_{n+1} + \dots$ desto kleiner werden, je größer n ist. Daraus folgt, daß das Glied u_n, wenn man darin n über alle Gränzen hinaus wachsen läßt, sich der Null unbegränzt nähern muß. Denn ist S die Summe der unendlichen Reihe, so ist

$$S - S_n = u_n + u_{n+1} + \dots,$$

was verschwinden muß für n unendlich groß ($n = \infty$), wozu aber das eben Angeführte nothwendig ist.

Verschwindet also u_n nicht für $n = \infty$, so ist die obige Reihe divergent.

V. Sind $a_0, a_1, a_2, \dots$ eine (unendliche) Reihe positiver Zahlen, und nähert sich $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ für ein unendlich wachsendes n einer Zahl, die > 1, so ist die Reihe

$$a_0 e_0 + a_1 e_1 + a_2 e_2 + \dots$$

worin e_n für stets wachsende n sich nicht der Null nähert, divergent.

Da nämlich für große n immer $a_{n+1} > a_n$, also die Größen a_n, $a_{n+1}, \dots$ wachsend sind, und e_n nicht Null ist, so wird $a_n e_n$ nicht zu Null für ein unendlich wachsendes n, also ist die Reihe divergent. (IV.)

VI. Sind wieder $a_0, a_1, a_2, \dots$ eine Reihe positiver Zahlen, und wird $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ für stets wachsende n kleiner als 1, so ist die Reihe

$$a_0 e_0 + a_1 e_1 + a_2 e_2 + \dots,$$

worin $e_0, e_1, e_2, \dots$ nicht über 1, ihrem absoluten Werthe nach, d. h. ohne Rücksicht auf ihr Vorzeichen, hinausgehen, konvergent.

Sei nämlich $\alpha < 1$ jene Gränze, so wird man also r immer groß genug annehmen können, daß

$$a_{r+1} \overset{=}{<} \alpha a_r\ {}^{*}),\ a_{r+2} \overset{=}{<} \alpha a_{r+1},\ \ldots$$

woraus $a_{r+2} \overset{=}{<} \alpha^2 a_r,\ a_{r+3} \overset{=}{<} \alpha^3 a_r,\ \ldots$

folglich

$$a_{r+1} + a_{r+2} + \ldots \overset{=}{<} a_r (1+\alpha+\alpha_2+\ldots)$$
$$\overset{=}{<} a_r \frac{1}{1-\alpha},$$

weil die ins Unendliche fortlaufende geometrische Reihe $1+\alpha+\alpha^2+\ldots = \frac{1}{1-\alpha}$ ist, indem $1+\alpha+\alpha^2+\ldots\alpha^n = \frac{\alpha^{n\pm1}1}{\alpha-1} = \frac{1-\alpha^{n+1}}{1\ \ \alpha}$, was für $\alpha < 1$, $n = \infty$, zu $\frac{1}{1-\alpha}$ wird.

Also ist von einem bestimmten Gliede a_r an:

$$a_{r+1}+a_{r+2}+\ldots \overset{=}{<} \frac{a_r}{1-\alpha},$$

also die Reihe

$$a_0+a_1+a_2+\ldots \overset{=}{<} a_0+a_1+\ldots+a_r+\frac{a_r}{1-\alpha},$$

d. h. endlich; um so mehr wird es also auch die Reihe $a_0 e_0 + a_1 e_1 \ldots$ sein.

So ist in der Reihe

$$1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+\ldots \text{ (Erster Absch. VI.)}: \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{n+1},$$

was für $n = \infty$ zu Null wird,

also ist diese Reihe konvergent.

VII. Sei $a_0, a_1, a_2, \ldots$ eine Reihe positiver Zahlen, die abnehmend seien, so konvergiren und divergiren zugleich folgende (unendliche) Reihen:

$$a_0+a_1+a_2+\ldots,$$
$$a_0+2a_1+4a_3+8a_7+16a_{15}+\ldots$$

---

*) Was man liest: a_{r+1} gleich oder kleiner als αa_r.

Denn $a_0 = a_0$

$$2\,a_1 = 2\,a_1$$
$$4\,a_3 < 2\,a_2 + 2\,a_3,$$
$$8a_7 < 2a_4 + 2a_5 + 2a_6 + 2a_7$$
$$\vdots$$

$$\overline{a_0 + 2a_1 + 4a_3 + 8a_7 + \ldots < 2(a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \ldots) - a_0},$$

ist also $a_0 + a_1 + a_2 + \ldots$ konvergent, so ist es auch $a_0 + 2a_1 + 4a_3 + 8a_7 + \ldots$

Ferner

$$a_0 = a_0,$$
$$2a_1 > a_1 + a_2,$$
$$4a_3 > a_3 + a_4 + a_5 + a_6$$
$$\vdots$$

$$\overline{a_0 + 2a_1 + 4a_3 + 8a_7 + \ldots > a_0 + a_1 + a_2 + \ldots}$$

ist also $a_0 + a_1 + a_2 + \ldots$ divergent, so ist es auch $a_0 + 2a_1 + 4a_3 + \ldots$

Konvergirt aber $a_0 + 2a_1 + 4a_3 + 8a_7 + \ldots$, so konvergirt auch $a_0 + a_1 + a_2 + \ldots$, denn wäre letztere Reihe divergent, so müßte es ja die erste auch sein; deßgleichen wenn die erste Reihe divergent ist, so ist es auch die zweite.

Sei z. B. $a_n = \frac{1}{(n+1)^\alpha}$, $\alpha > 0$, also

$$a_0 + a_1 + a_2 + \ldots = \frac{1}{1^\alpha} + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \ldots,$$

$$a_1 + 2a_1 + 4a_3 + 8a_7 + \ldots = 1 + 2^{1-\alpha} + 4^{1-\alpha} + 8^{1-\alpha} + 16^{1-\alpha} + \ldots$$
$$= 1 + 2^{1-\alpha} + (2^{1-\alpha})^2 + (2^{1-\alpha})^3 + \ldots.$$

Letztere Reihe, als eine geometrische, konvergirt für $\alpha > 1$, divergirt für $\alpha \leqq 1$, also ist die Reihe $1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \ldots$ konvergent für $\alpha > 1$, divergent für $\alpha \leqq 1$.

VIII. Sind $u_0, u_1, u_2, \ldots u_n, \ldots$ eine Reihe Größen und ist $p_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$ stets kleiner als die bestimmte Zahl k, was auch n sei, so ist die Größe

$$e_0\,u_0 + e_1\,u_1 + e_2\,u_2 + \ldots + e_n\,u_n,$$

worin $e_0 > e_1 > e_2 > e_3 > \ldots > e_n$, stets kleiner als $k e_0$, was auch n sei.

Denn

$$e_0 u_0 + e_1 u_1 + \ldots + e_n u_n = e_0 p_0 + e_1 (p_1 - p_0) + e_2 (p_2 - p_1) + \ldots$$
$$+ e_n (p_n - p_{n-1}) = p_0 (e_0 - e_1) + p_1 (e_1 - e_2) + \ldots$$
$$+ p_{n-1} (e_{n-1} - e_n) + p_n e_n$$

d. h. $< k (e_0 - e_1) + k (e_1 - e_2) + \ldots + k e_n$, d. h. $< k e_0$.

IX. Sei die Reihe

$$v_0 + v_1 x + v_2 x^2 + \ldots + v_n x^n + \ldots \quad (1)$$

konvergent für $x = k$, so konvergirt sie auch für $x < k$ (x immer als positiv, also k auch als positiv angenommen), $v_0, v_1, \ldots$ als positiv angenommen.

Denn für $x = \alpha < k$ ist jedes Glied von $v_0 + v_1 \alpha + v_2 \alpha^2 + \ldots$ kleiner als das entsprechende von

$$v_0 + v_1 k + v_2 k^2 + \ldots,$$

was den Satz beweist.

Sind $v_0, v_1, \ldots$ zum Theil negativ, konvergirt aber die Reihe, welche man erhält, wenn man die Zahlwerthe *) der Glieder $v_0 + v_1 x + \ldots$ blos berücksichtigt, so gilt der Satz offenbar noch.

Gesetzt nun, man wisse für $x = \alpha$ ($\leqq k$) sei die Summe der Reihe (1) $f(\alpha)$, so ist sie $f(\beta)$ für $x = \beta$, wenn $\beta \leqq k$, und positiv ist, d. h. man erhält die Summe für $x = \beta$, wenn man in der früheren α mit β vertauscht.

Denn es sei allgemein,

$$v_0 + v_1 + \ldots + v_n x^n = \varphi(x), \text{ also } v_0 + v_1 \alpha + \ldots + v_n \alpha^n$$
$$= \varphi(\alpha),\ v_0 + v_1 \beta + \ldots + v_n \beta^n = \varphi(\beta),$$

so erhält man $f(\alpha)$, wenn man in $\varphi(\alpha)$ n unendlich groß werden läßt (IV.). Deßgleichen wird man die Summe der Reihe für $x = \beta$ erhalten, wenn man in $\varphi(\beta)$ n unendlich groß werden läßt. Man erhält also diesen Werth offenbar, wenn man in $f(\alpha)$ statt α setzt β, was den Satz beweist. Dies gilt nun, was auch $v_0, v_1 \ldots$ hinsichtlich ihres Vorzeichens seien, wenn nur die Reihe (1) für jeden positiven Werth von x, der $\leqq k$ ist, konvergirt.

*) So ist $+7$ der Zahlwerth von -7; $+\sqrt[3]{15}$ der Zahlwerth von $-\sqrt[3]{15}$; $+5$ der Zahlwerth von 5. Allgemein wird der Zahlwerth des (reellen) a gleich $+\sqrt{a^2}$ sein; eben so wäre $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ der Zahlwerth von $r(\cos\alpha + i \sin\alpha) = a + b\,i$.

X. Die Summe zweier konvergenten Reihen ist auch eine konvergente Reihe; deßgleichen ihr Unterschied.

Sind $P = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots$, $Q = v_0 + v_1 + v_2 + \ldots$ die Summen zweier konvergenten Reihen und man setze

$$P = u_0 + u_1 + \ldots + u_n + U_n,\ Q = v_0 + v_1 + \ldots + v_n + V_n,$$

so ist

$$P \pm Q = u_0 \pm v_0 + u_1 \pm v_1 + \ldots + u_n \pm v_n + U_n \pm V_n,$$

und da für $n = \infty$ sowohl U_n als V_n verschwindet (IV.), so verschwindet auch $U_n \pm V_n$, d. h. die Reihe

$$(u_0 \pm v_0) \pm (u_1 \pm v_1) + \ldots$$

ist konvergent und ihre Summe ist $P \pm Q$.

XI. Bezeichnet man durch $a_0, a_1, a_2, \ldots$; $b_0, b_1, b_2, \ldots$ die Zahlwerthe zweier unendlichen konvergenten Reihen:

$$u_0, u_1, u_2, \ldots; v_0, v_1, v_2, \ldots$$

und sind die Reihen $a_0 + a_1 + a_2 + \ldots$; $b_0 + b_1 + b_2, \ldots$ gleichfalls konvergent, so ist es auch die Reihe $R_0 + R_1 + R_2 + \ldots$, worin $R_0 = u_0 v_0$, $R_2 = u_0 v_1 + v_0 u_1, \ldots, R_n = u_0 v_n + u_1 v_{n-1} + u_2 v_{n-2} + \ldots + u_n v_0, \ldots$

und die Summe dieser Reihe ist $(v_1 + v_1 + v_2 + \ldots)(u_1 + u_1 + u_2 + \ldots)$.

Sei $k_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$; $l_n = v_0 + v_1 + v_2 + \ldots + v_n$, so ist, wie man leicht sieht:

$$R_0 + R_1 + \ldots + R_{2n} = k_n l_n + [k_0 v_{2n} + k_1 v_{2n-1} + \ldots + k_{n-1} v_{n+1} + l_0 u_{2n} + l_1 u_{2n-1} + \ldots + l_{n-1} u_{n+1}]$$

Sei nun

$$k_0 v_{2n} + k_2 v_{2n-1} + \ldots + k_{n-1} v_{n+1} = p,\ l_0 u_{2n} + l_1 u_{2n-1} + \ldots + l_{n-1} u_{n+2} = q,\ a_0 + a_1 + \ldots = a,\ b_0 + b_1 + \ldots = b,$$

so ist, ohne Rücksicht auf das Vorzeichen (ob positiv oder negativ, d. h. also Alles positiv genommen):

$$p < a(b_{2n} + b_{2n-1} + \ldots + b_{n+1}),$$
$$q < b(a_{2n} + a_{2n-1} + \ldots + a_{n+1}),$$

d. h. da $b_0 + b_1 + \ldots$; $a_0 + a_1 + \ldots$, konvergent sind, es werden p und q sich der Null immer mehr nähern, je größer n ist, (IV), so daß also für $n = \infty$:

$$R_0 + R_1 + \ldots = (u_0 + u_1 + \ldots)(v_0 + v_1 + \ldots).$$

XII. Es seien $u_0 + u_1 + \ldots$, $v_0 + v_1 + \ldots$ zwei konvergente unendliche Reihen, so sind die Reihen $u_0 + u_1 \alpha + u_2 \alpha^2 + \ldots$; $v_0 + v_1 \alpha + v_2 \alpha^2 + \ldots$ noch konvergent, wenn das positive $\alpha < 1$ (IX).

Da sowohl $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ als $\frac{v_{n+1}}{v_n}$, indem die ersten Reihen nothwendig fallend sein müssen (II), ohne Rücksicht auf das Zeichen, nicht mehr als 1

sein können, so sind die Größen $\frac{u_{n+1}\alpha^{n+1}}{u_n\,\alpha^n} = \frac{u_{n+1}}{u_n}\alpha, \frac{v_{n+1}\alpha^{n+1}}{v_n\,\alpha^n} =$ $\frac{v_{n+1}}{v_n}\alpha$ für $\alpha < 1$ auch kleiner als 1 ihrem Zahlwerthe nach, d. h. die Zahlwerthe der Reihen

$$u_0 + u_1\,\alpha + u_2\,\alpha^2 + \ldots;\ v_0 + v_1\,\alpha + v_2\,\alpha^2 + \ldots$$

bilden gleichfalls konvergente Reihen (VI). Demnach ist (nach XI):

$$(u_0+u_1\,\alpha+u_2\alpha^2+\ldots)(v_0+v_1\alpha+v_2\alpha^2+\ldots) = u_0v_0+ (u_1v_0+u_1v_2)\alpha+(u_2v_0+u_1v_1+u_0v_2)\alpha^2+\ldots$$

für $\alpha<1$. Ist nun (für $\alpha = 1$) die Reihe

$$u_0v_0+(u_1v_0+u_0v_1)+(u_2v_0+u_1v_1+u_0v_2)\ldots$$

gleichfalls konvergent, so ist auch (nach IX):

$$(u_0+u_1+u_2+\ldots)(v_0+v_1+v_2+\ldots) = u_0v_0+(u_1v_0+u_1v_0)+ (u_2v_0+u_1v_1+u_0v_2)+\ldots$$

und man sieht (im Gegensatz zu XI), daß zur Giltigkeit dieses Satzes bloß erforderlich ist, daß die drei hier vorkommenden unendlichen Reihen konvergent seien.

XIII. Wenn in der unendlichen Reihe $a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots$, $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ für alle Werthe von n eine gewisse bestimmte Zahl k nicht übersteigt, so ist für unendlich abnehmende Werthe von x die Gränze, der sich $a_0 + a_1\,x + a_2\,x^2 + \ldots$ nähert, gleich a_0. Denn es ist $a_1 \leqq k\,a_0$, $a_2 \leqq k^2a_0, \ldots$ also $a_0+a_1x+\ldots \leqq a_0(1+kx+k^2x^2+\ldots)$. Da nun x sehr klein, also $< \frac{1}{k}$ sein soll, so ist das letztere $= \frac{a_0}{1-kx}$, was zu a_0 wird, wenn x verschwindet. Die gemachte Bedingung ist z. B. in konvergenten Reihen immer erfüllt.

Erfüllen die Reihen $a_0+a_1x+\ldots$; $b_0+b_1x+\ldots$ die obige Bedingung hinsichtlich der Koeffizienten $a_0, a_1, \ldots; b_0, b_1, \ldots$, und sind dieselben gleich groß (also natürlich konvergent) für alle (positiven) x unterhalb einer bestimmten Gränze, so ist $a_0=b_0$, $a_1=b_1, \ldots$

Denn es ist

$$a_0-b_0+(a_1-b_1)x+(a_2-b_2)x^2+\ldots = 0$$

für alle diese Werthe von x, also auch für $x=0$, und da alsdann die erste Seite zu a_0-b_0 wird, so ist $a_0-b_0=0$, d. h. $a_0=b_0$. Alsdann ist für alle diese x:

$$(a_1-b_1)x+(a_2-b_2)x^2+\ldots = 0,$$

d. h. $\quad (a_1-b_1)+(a_2-b_2)x+\ldots\ldots = 0,$

woraus wieder $a_1=b_1$ u. s. w.

XIV. Es möge zum Schlusse dieses Abschnitts zunächst eine Anwendung des wichtigen Satzes in XII. gemacht werden.

Die Reihe $1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^3}{1.2.3}+\ldots$ ist, wie man nach VI. findet, konvergent, was auch x sei, da dort $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{x}{n+1}$, was zu Null wird für $n=\infty$. (Wäre x negativ, so hätten manche Glieder das Vorzeichen —, d. h. den Faktor -1, was aber an der Sache Nichts ändert, indem in VI. die Faktoren $e_0, e_1, \ldots$ nur nicht über 1 hinausgehen dürfen, ihrem Zahlwerthe nach).

Eben so sind konvergent die Reihen

$$1+\frac{y}{1}+\frac{y^2}{1.2}+\frac{y^3}{1.2.3}+\ldots;\ 1+\frac{x+y}{1}+\frac{(x+y)^2}{1.2}+\ldots,$$

was auch x und y seien.

Multiplizirt man nun $1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1.2}\ldots$ mit $1+\frac{y}{1}+\frac{y^2}{1.2}\ldots$, so erhält man:

$$1+\left(\frac{x}{1}+\frac{y}{1}\right)+\left(\frac{x^2}{1.2}+\frac{xy}{1}+\frac{y^2}{1.2}\right)+\ldots$$
$$+\left(\frac{x^n}{1.2\ldots n}+\frac{x^{n-1}y}{1.2\ldots(n-1)}+\frac{x^{n-2}}{1.2\ldots(n-2)}\frac{y^2}{1.2}+\ldots+\frac{y^n}{1.2.n}\right)+\ldots$$
$$=1+\frac{x+y}{1}+\frac{(x+y)^2}{1.2}+\ldots+\frac{(x+y)^n}{1.2\ldots n}+\ldots$$

und da diese letztere Reihe konvergent ist, so ist also (nach XII.), was auch x und y seien:

$$\left(1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1.2}+\ldots\right)\left(1+\frac{y}{1}+\frac{y^2}{1.2}+\ldots\right)=1+\frac{x+y}{1}$$
$$+\frac{(x+y)^2}{1.2}+\ldots$$

Ist also $1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1.2}+\ldots=f(x)$, so hat man

$$f(x).\,f(y)=f(x+y)$$

und folglich nach dem Satze in II. des dritten Abschnitts:

$$f(x)=a^x,\ a=f(1)$$

d. h. $a=1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}=e$ (erster Abschnitt VI.), also, was auch das reelle x sei, so ist

$$1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^3}{1.2.3}+\ldots=e^x,$$

was diesen Satz, wie am angeführten Orte versprochen wurde, streng beweist.

Die so eben bestimmte Zahl e ist zur Grundzahl eines Logarithmensystems gemacht worden, welche Logarithmen man mit dem Namen der natürlichen belegt hat. Bezeichnet l (a) den natürlichen Logarithmus von a, so ist also

$$a = e^{l(a)}$$

und wenn man mit dem Zeichen log die gewöhnlichen Logarithmen bezeichnet, so ist

$$\log a = l(a). \log e \text{ also}$$

$$l(a) = \frac{\log a}{\log e},$$

so daß die natürlichen Logarithmen leicht aus den gewöhnlichen (briggischen) und umgekehrt berechnet werden können. Die Zahl log e ist = 0·434294481903 . . .

Siebenter Abschnitt.

Die natürliche Exponenzialreihe. Nächste Folgerungen daraus.

§. 1.

I. So eben (in XIV. des vorigen Abschnitts) haben wir gesehen, daß für jedes reelle x:

$$1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \ldots = e^x. \qquad (1)$$

Wir fragen nun, zu was die Reihe der ersten Seite wird, wenn man für x eine gemischt imaginäre Zahl $a + bi = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ (Zweiter Absch. II.) setzt.

Die Reihe wird, wie man nach dem angeführten Abschnitt leicht findet, zu:

$$1 + \frac{r}{1}\cos\alpha + \frac{r^2}{1.2}\cos 2\alpha + \ldots + i\left(\frac{r}{1}\sin\alpha + \frac{r^2}{1.2}\sin 2\alpha + \ldots\right) (2)$$

und besteht somit aus zwei unendlichen Reihen. Da $\cos\alpha$, $\cos 2\alpha, \ldots$, $\sin\alpha$, $\sin 2\alpha, \ldots$ die Einheit nicht übersteigen, so sind beide Reihen konvergent mit

$$1+\frac{r}{1}+\frac{r^2}{1.2}+\ldots \text{ (Sechster Absch. VI.)}$$

Diese letztere Reihe ist aber, da $\dfrac{\dfrac{r^{n+1}}{1.2\ldots(n+1)}}{\dfrac{r^n}{1.2\ldots n}}=\dfrac{r}{n+1}$, konvergent, was auch r sei, also sind die Reihen in (2) für alle Werthe von r und α konvergent.

II. Man setze nun

$$1+\frac{r}{1}\cos\alpha+\frac{r^2}{1.2}\cos 2\alpha+\ldots=P,\ \frac{r}{1}\sin\alpha+\frac{r^2}{1.2}\sin 2\alpha+\ldots=Q, \quad (3)$$

so ist die Summe in (2) gleich $P+iQ=R(\cos S+i\sin S)$, wobei offenbar R sowohl als S von den Werthen von a und b abhängen, so daß etwa $R=f(a,b)$, $S=F(a,b)$, d. h. R eine Funktion von a sowohl als von b u. s. w. (Dritter Absch. I.)

Setzt man also für $x=a+bi$ die Summe in (2), d. h. $1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1.2}+\ldots=\varphi(x)$, so ist

$$\varphi(x)=f(a,b)\left[\cos F(a,b)+i\sin F(a,b)\right]. \quad (4)$$

Ist $y=a^1+b^1 i$, so ist eben so:

$$\varphi(y)=f(a^1,b^1)\left[\cos F(a^1,b^1)+i\sin F(a^1,b^1)\right], \quad (5)$$

und ist demnach $x+y=a+a^1+(b+b^1)i$, so ist

$$\varphi(x+y)=f(a+a^1,b+b^1)$$
$$\left[\cos F(a+a^1,b+b^1)+i\sin F(a+a^1,b+b^1)\right]. \quad (6)$$

Nun ergibt sich aber leicht, wie in XIV. des vorigen Abschnitts, daß

$$\varphi(x).\ \varphi(y)=\varphi(x+y), \quad (7)$$

so daß also, wenn man hier die entsprechenden Werthe aus (4), (5), (6) setzt, und das im zweiten Abschnitt III. Gesagte beachtet:

$$f(a,b).\ f(a^1,b^1)\left[\cos\left(F(a,b)+F(a^1,b^1)\right)+i\sin\left(F(a,b)+F(a^1,b^1)\right)\right]=$$
$$f(a+a^1,b+b^1)\left[\cos F(a+a^1,b+b^1)+i\sin F(a+a^1,b+b^1)\right]$$

woraus nach III. des zweiten Absch.:

$$f(a,b).\ f(a^1,b^1)\cos\left[F(a,b)+F(a^1,b^1)\right]=$$
$$f(a+a^1,b+b^1)\cos F(a+a^1,b+b^1),$$
$$f(a,b).\ f(a^1,b^1).\ \sin\left[F(a,b)+F(a^1,b^1)\right]=$$
$$f(a+a^1,\ b+b^1)\sin F(a+a^1,\ b+b^1). \quad (8)$$

Quadrirt man beide Gleichungen (8) und addirt, so ist, da $f(a,b)$, $f(a',b')$, $f(a+a', b+b')$ positiv sind (zweiter Absch. II.):

$$f(a+a', b+b')=f(a,b).\ f(a',b'), \qquad (9)$$

und dann folgt aus (8) leicht:

$$\cos\left[F(a,b)+F(a',b')\right]=\cos F(a+a', b+b')$$

$$\sin\left[F(a,b)+F(a',b')\right]=\sin F(a+a', b+b'),$$

woraus:

$$F(a+a', b+b')=F(a,b)+F(a',b')+2m\pi, \qquad (10)$$

wo m eine ganze, positive oder negative Zahl ist, da nur alsdann Sinus und Cosinus einander gleich sind.

Setzt man in der Gleichung (10) $b=b'=0$, so ist

$$F(a+a',0)=F(a,0)+F(a',0)+2m\pi,$$

woraus nach III. des dritten Abschnitts folgt:

$$F(a,0)=\beta a-2m\pi,$$

wenn β eine bestimmte, von a nicht abhängende Zahl ist.

Ganz eben so findet sich, wenn $a=a'=0$:

$$F(0,b)=\gamma b-2m\pi,$$

wo γ dieselbe Beschaffenheit hat, wie β.

Endlich ist für $a=b'=0$:

$$F(a',b)=2m\pi+F(0,b)+F(a',0)$$

d. h. $$F(a',b)=2m\pi+\gamma b-2m\pi+\beta a'-2m\pi=\gamma b+\beta a'-2m\pi$$

also für $a'=a$:

$$F(a,b)=\gamma b+\beta a-2m\pi, \qquad (11)$$

wodurch nun $F(a,b)$ bestimmt ist.

Was $f(a,b)$ anbelangt, so ist es immer positiv, so daß wir etwa $f(a,b)=e^{\varphi(a,b)}$ setzen können.

Alsdann ergibt sich aus (9):

$$e^{\varphi(a+a', b+b')}=e^{\varphi(a,b)}\,e^{\varphi(a',b')}=e^{\varphi(a,b)+\varphi(a',b')}$$

d. h. $$\varphi(a+a', b+b')=\varphi(a,b)+\varphi(a',b'). \qquad (12)$$

Da nun die Gleichung (12) mit (10) zusammenstimmt, wenn $m=0$, so folgt eben so, wie oben:

$$\varphi(a,b)=\varepsilon b+\delta a, \qquad (13)$$

worin ε und δ gleichfalls von a und b nicht abhängen. Also ist

$$f(a,b)=e^{\varphi(a,b)}=e^{\varepsilon b+\delta a} \qquad (14)$$

und endlich

$$P+Qi=e^{\delta a+\varepsilon b}\left[\cos(\beta a+\gamma b)+i\sin(\beta a+\gamma b)\right],$$

$$\left.\begin{aligned}P&=e^{\delta a+\varepsilon b}\cos(\beta a+\gamma b),\\ Q&=e^{\delta a+\varepsilon b}\sin(\beta a+\gamma b).\end{aligned}\right\}\quad(15)$$

Da δ, ε, β, γ immer dieselben bleiben, was auch a und b sind, so hat man für a und b bloß irgend bestimmte Werthe zu setzen, um jene Zahlen zu finden.

Sei b = 0, a positiv, also r = a, $\alpha = 0$; alsdann ist

$$P = 1 + \frac{a}{1} + \frac{a^2}{1.2} + \ldots = e^a \text{ (Sechster Absch. XIV).}$$

d. h.

$$e^{\delta a} \cos \beta a = e^a, \text{ also } \delta = 1, \beta = 0. \quad (16)$$

Sei ferner a = 0, b positiv = b, so ist r = b, $\alpha = \frac{\pi}{2}$, also

$$P = e^{\varepsilon b} \cos \gamma b = 1 - \frac{b^2}{1.2} + \frac{b^4}{1.1.3.4} - \ldots,$$

$$Q = e^{\varepsilon b} \sin \gamma b = b - \frac{b^3}{1.2.3} + \frac{b^5}{1.2.3.4.5} - \ldots (17)$$

woraus

$$e^{\varepsilon b}(\cos\gamma b + i \sin\gamma b) = \varphi(b\,i),$$

wenn man die in (4)—(7) gebrauchte Bezeichnung wieder aufnimmt. Deßgleichen

$$e^{\varepsilon b}(\cos\gamma b - i \sin\gamma b) = \varphi(-b\,i).$$

Multiplizirt man die zwei letzten Gleichungen mit einander, so ergibt sich, wenn man (7) beachtet und bedenkt, daß $\varphi(0) = 1$:

$$e^{2\varepsilon b} = \varphi(b\,i).\varphi(-b\,i) = \varphi(b\,i - b\,i) = \varphi(0) = 1, \varepsilon = 0, \quad (18)$$

was übrigens sich leicht direkt beweisen läßt, da

$$\left(1 + \frac{b\,i}{1} + \frac{(b\,i)^2}{1.2} + \frac{(b\,i)^3}{1.2.3} + \ldots\right)$$

$$\left(1 - b\,i + \frac{(-b\,i)^2}{1.2} + \frac{(-b\,i)^3}{1.2.3} + \ldots\right) = 1.$$

Jetzt ergibt sich aus (17):

$$\cos\gamma b = 1 - \frac{b^2}{1.2} + \frac{b^4}{1.2.3.4} - \ldots\ldots,$$

$$\sin\gamma b = b - \frac{b^3}{1.2.3} + \frac{b^5}{1.2.3.4.5} - \ldots (19)$$

Nun ist, wie im zweiten Abschnitt V. bemerkt wurde, für $\gamma b < \frac{\pi}{2}$:

$\sin\gamma b < \gamma b$, $\operatorname{tg}\gamma b > \gamma b$, d. h. $\frac{\sin\gamma b}{\gamma b} < 1$, $\frac{\operatorname{tg}\gamma b}{\gamma b} > 1$ oder $\frac{\sin\gamma b}{\gamma b \cos\gamma b} > 1$,

$\frac{\sin\gamma b}{\gamma b} > \cos\gamma b$. Also ist der Werth von $\frac{\sin\gamma b}{\gamma b}$ immer zwischen 1 und $\cos\gamma b$ enthalten, d. h.:

$$\frac{1}{\gamma}\left(1-\frac{b^2}{1.2.3}+\ldots\right)<1$$
$$>1-\frac{b^2}{1.2}+\frac{b^2}{1.2.3.4}-\ldots$$

Wird nun b immer kleiner, so wird letztere Größe der 1 gleich, die erste wird zu $\frac{1}{\gamma}$, folglich muß $\frac{1}{\gamma}=1$, da es immer zwischen zwei Größen liegt, die beide 1 werden, d. h. $\gamma=1$ sein, so daß endlich

$$P+Qi=e^a(\cos b+i\sin b)$$

d. h.

$$1+\frac{(a+bi)}{1}+\frac{(a+bi)^2}{1.2}+\ldots=e^a(\cos b+i\sin b). \qquad (20)$$

Zugleich folgt aus (19), daß für jedes reelle b:

$$\cos b=1-\frac{b^2}{1.2}+\frac{b^4}{1.2.3.4}-\ldots,$$
$$\sin b=b-\frac{b^3}{1.2.3}+\frac{b^5}{1.2.3.4.5}-\ldots \qquad (21)$$

Aus (20) ergeben sich eben so für jedes positive r und jedes α:

$$1+r\cos\alpha+\frac{r^2}{1.2}\cos 2\alpha+\ldots=e^{r\cos\alpha}\cos(r\sin\alpha),$$
$$r\sin\alpha+\frac{r^2}{1.2}\sin 2\alpha+\ldots=e^{r\cos\alpha}\sin(r\sin\alpha) \qquad (22)$$

III. Setzt man, der Analogie nach, die Summe der Reihe in (20) gleich e^{a+bi}, so ist also

$$e^{a+bi}=e^a(\cos b+i\sin b),$$

für $a=0$: $e^{bi}=\cos b+i\sin b$,

also $e^a.\ e^{bi}=e^{a+bi}$,

$$e^{a+bi}.\ e^{c+di}=e^{a+c+(b+d)i},$$
$$e^{2m\pi i}=1,\ e^{(2m+1)\pi i}=-1,$$

wenn m eine ganze (positive oder negative) Zahl ist.

IV. Aus $e^{bi}=\cos b+i\sin b$

$e^{-bi}=\cos b-i\sin b$

folgt: $$\cos b = \frac{e^{bi}+e^{-bi}}{2},$$

$$\sin b = \frac{e^{bi}-e^{-bi}}{2i}.$$

§. 2.

I. Sei $a+bi=r(\cos\alpha+i\sin\alpha)$, so findet man nach dem im zweiten Abschnitt Gesagten, für ein ganzes positives n:

$$\left[r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\alpha+2m\pi}{n}+i\sin\frac{\alpha+2m\pi}{n}\right)\right]^n = r\left(\cos(\alpha+2m\pi)+\right.$$

$$\left. i\sin(\alpha+2m\pi)\right)=r(\cos\alpha+i\sin\alpha)=a+bi,$$

folglich ist

$$\sqrt[n]{(a+bi)}=r^{\frac{1}{n}}\left[\cos\frac{\alpha+2m\pi}{n}+i\sin\frac{\alpha+2m\pi}{n}\right]$$

$$=r^{\frac{1}{n}}e^{\frac{\alpha+2m\pi}{n}i}, \qquad (1)$$

wenn m irgend eine ganze (positive oder negative) Zahl ist.

Wir wollen nun untersuchen, wie viele verschiedene Werthe unter denen in (1) sind. Setzt man nach und nach $m=0, 1, 2, \ldots n-1$, so erhält man lauter verschiedene Werthe. Denn sollten für $m=k$ und $m=l$ gleiche Werthe herauskommen, so müßte:

$$\cos\frac{\alpha+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\alpha+2k\pi}{n}=\cos\frac{\alpha+2l\pi}{n}+i\sin\frac{\alpha+2l\pi}{n}.$$

d. h. $$\cos\frac{\alpha+2k\pi}{n}=\cos\frac{\alpha+2l\pi}{n},$$

$$\sin\frac{\alpha+2k\pi}{n}=\sin\frac{\alpha+2l\pi}{n},$$

sein, was nur möglich ist, wenn

$$\frac{\alpha+2k\pi}{n}=\frac{\alpha+2l\pi}{n}\pm 2r\pi,$$

wo r eine ganze, positive Zahl ist. D. h. es müßte

$$2k\pi=2l\pi\pm 2r\pi n$$
$$k-l=\pm rn.$$

Nun sind aber k und l beide kleiner als n, also ist $k-l$ zwischen $-n$ und n, und da nicht $r=0$ sein kann, da sonst $k=l$ wäre, aber auch nicht $r=1, 2, \ldots$, da ja $k-l$ nicht einmal $=\pm n$,

ist, so ist letztere Gleichung unmöglich, also erwiesen, daß für $m=k$ und $m=l$, wo nicht $k=l$, und k und l kleiner als n sind, verschiedene Werthe von $\sqrt[n]{a+bi}$ herauskommen.

Für $m=n$ ist $\cos\frac{\alpha+2m\pi}{n}+i\sin\frac{\alpha+2m\pi}{n}=\cos\left(\frac{\alpha}{n}+2\pi\right)+$ $i\sin\left(\frac{\alpha}{n}+2\pi\right)=\cos\frac{\alpha}{n}+i\sin\frac{\alpha}{n}$, so daß man dasselbe erhält, als wenn man $m=0$ gesetzt hätte.

Ist überhaupt $m>n$, so kann man setzen $m=rn+k$, wo $r=1,2,..,$ $k=0, 1, \ldots n-1$.

Alsdann ist $\cos\left(\frac{\alpha+2m\pi}{n}\right)+i\sin\left(\frac{\alpha+2m\pi}{n}\right)=$ $\cos\left(\frac{\alpha+2k\pi}{n}+2r\pi\right)+i\sin\left(\frac{\alpha+2k\pi}{n}+2r\pi\right)=\cos\frac{\alpha+2k\pi}{n}$ $+i\sin\frac{\alpha+2k\pi}{n}$, so daß man dasselbe erhält, als wenn man $m=k$ gesetzt hätte.

Ist m negativ $=-q$, so ist $\cos\left(\frac{\alpha+2m\pi}{n}\right)+i\sin\left(\frac{\alpha+2m\pi}{n}\right)$ $=\cos\frac{\alpha-2q\pi}{n}+i\sin\frac{\alpha-2q\pi}{n}=\cos\left(\frac{\alpha-2q\pi}{n}+2r\pi\right)+i\sin$ $\left(\frac{\alpha-2q\pi}{n}+2r\pi\right)=\cos\frac{\alpha+(2rn-2q)\pi}{n}+i\sin\frac{\alpha+(2rn-2q)\pi}{n}$.

Man wird nun die positive ganze Zahl r immer so wählen können, daß $2rn-2q$ positiv ist, so daß man für $m=-q$ dasselbe erhält, als für $m=(rn-q)$.

Faßt man Alles zusammen, so ergibt sich, daß die Größe $\sqrt[n]{a+bi}$ nur n verschiedene Werthe hat, die man findet, wenn man in $r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\alpha+2m\pi}{n}+i\sin\frac{\alpha+2m\pi}{n}\right)$ setzt $m=0, 1, 2, 3, \ldots n-1$.

Andere imaginäre Formen $R(\cos a+i\sin a)$, welche die Eigenschaft haben, daß ihre $n$te Potenz $=r(\cos\alpha+i\sin\alpha)$ ist, als die obigen, gibt es aber, wie man sich leicht überzeugt, nicht.

II. Setzt man $b=0$, $a=+c$, so ist $r=c$, $\alpha=0$, also:

$$\sqrt[n]{(+c)}=c^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{2m\pi}{n}+i\sin\frac{2m\pi}{n}\right)=\begin{cases} c^{\frac{1}{n}} \\ c^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}\right) \\ c^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{4\pi}{n}+i\sin\frac{4\pi}{n}\right) \\ \vdots \\ c^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{2(n-1)\pi}{n}+i\sin\frac{2(n-1)\pi}{n}\right) \end{cases}$$

Ist $b=0$, $a=-c$, so ist $r=+c$, $\alpha=+\pi$, also

$$\sqrt[n]{(-c)}=(+c)^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{2m+1}{n}\pi+i\sin\frac{2m+1}{n}\pi\right)=\begin{cases} (+c)^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\pi}{n}+i\sin\frac{\pi}{n}\right) \\ (+c)^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{3\pi}{n}+i\sin\frac{3\pi}{n}\right) \\ \vdots \\ (+c)^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{2n-1}{n}\pi+i\sin\frac{2n-1}{n}\pi\right) \end{cases}$$

So sind etwa die Werthe von $\sqrt[3]{(c)}$:

$$c^{\frac{1}{3}},\ c^{\frac{1}{3}}\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)=c^{\frac{1}{3}}\left(-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}\right),$$

$$c^{\frac{1}{3}}\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

Von $\sqrt[3]{(-c)}$:

$$(+c)^{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}\right),\ (+c)^{\frac{1}{3}}(-1),\ (+c)^{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

Daraus folgt:

$$\sqrt[n]{1}=\cos\frac{2m\pi}{n}+i\sin\frac{2m\pi}{n}=e^{\frac{2m\pi}{n}i},$$

$$\sqrt[n]{-1}=\cos\frac{2m+1}{n}\pi+i\sin\frac{2m+1}{n}\pi=e^{\frac{2m+1}{n}\pi i}$$

$$\sqrt[n]{(c)}=c^{\frac{1}{n}}\sqrt[n]{1},\ \sqrt[n]{(-c)}=(+c)^{\frac{1}{n}}\sqrt[n]{-1}.$$

wobei wir durch $c^{\frac{1}{n}}$ den Werth, wie er durch die gewöhnliche Wurzelausziehung erhalten wird, bezeichnen. Alsdann stellt $\sqrt[n]{c}$ die n Werthe, welche dieser Größe zukommen, vor.

III. Betrachten wir wieder die Form der Werthe von $\sqrt[n]{1}$. Für m=0 erhält man 1; für m=1: $\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}$; für m = n − 1: $\cos\frac{2n-2}{n}\pi+i\sin\frac{2n-2}{n}\pi=\cos\left(2\pi-\frac{2\pi}{n}\right)+i\sin\left(2\pi-\frac{2\pi}{n}\right)=\cos\frac{2\pi}{n}-i\sin\frac{2\pi}{n}$, also dasselbe was vorhin, nur mit dem Unterschiede, daß i mit dem negativen Zeichen behaftet ist. Deßgleichen für m=2: $\cos\frac{4\pi}{n}+i\sin\frac{4\pi}{n}$, und für m=n−2: $\cos\frac{2n-4}{n}n+i\frac{2n-4}{n}\pi$ $=\cos\frac{4\pi}{n}-i\sin\frac{4\pi}{n}$ u. s. f.

Man wird daraus schließen, daß die n Werthe von $\sqrt[n]{1}$, wenn n eine ungerade Zahl ist, sich darstellen lassen durch

$$\cos\frac{2m\pi}{n}\pm i\sin\frac{2m\pi}{n},\ m=1,2,3,\ldots\frac{n-1}{2},$$

wozu noch +1 kommt.

Ist aber n eine gerade Zahl, so erhält man immer dasselbe wie so eben, nur sind dann, wenn der erste Werth + 1 ausgeschieden ist, eine ungerade Anzahl von Werthen vorhanden. Immer entsprechen

sich von diesen der erste und letzte, zweite und vorletzte u. s. f. Der mittelste ist $\left(\text{für } m=\frac{n}{2}\right)\cos\pi+i\sin\pi=-1$; also wenn n eine gerade Zahl ist, so können die n Werthe von $\sqrt[n]{1}$ dargestellt werden durch

$$\cos\frac{2m\pi}{n}\pm i\sin\frac{2m\pi}{n},\ m=1,2,\ldots\frac{n-2}{2},$$

wozu noch ± 1 kommen.

Ganz ähnlich findet sich:

für ein ungerades n: $\sqrt[n]{-1}=\cos\frac{2m+1}{n}\pi\pm i\sin\frac{2m+1}{n}\pi$,

$m=0,1\ldots\ldots\frac{n-3}{2}$,

und noch -1,

für ein gerades n: $\sqrt[n]{-1}=\cos\frac{2m+1}{n}\pi\pm i\sin\frac{2m+1}{n}\pi$,

$m=0,1,\ldots\ldots\frac{n-2}{2}$.

IV. Die Auflösung der Gleichungen

$$x^n+a^n=0,\ x^n-a^n=0$$

kommt auf das Frühere zurück, denn aus der ersten folgt:

$$x=\sqrt[n]{(-a^n)}=(a^n)^{\frac{1}{n}}\sqrt[n]{-1},$$

aus der zweiten:

$$x=\sqrt[n]{a^n}=(a^n)^{\frac{1}{n}}\sqrt[n]{1},$$

was jeweils n Werthe gibt. Ist a positiv und man beachtet das im vierten Abschnitt I. Gesagte, so wird man einsehen, daß (III) für ein ungerades n:

$$x^n-a^n=(x-a)\left[x-a\left(\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}\right)\right]$$

$$\left[x-a\left(\cos\frac{2\pi}{n}-i\sin\frac{2\pi}{n}\right)\right]\left[x-a\left(\cos\frac{4\pi}{n}+i\sin\frac{4\pi}{n}\right)\right]$$

$$\left[x-a\left(\cos\frac{4\pi}{n}-i\sin\frac{4\pi}{n}\right)\right]\ldots$$

$$\ldots\ldots$$

$$=(x-a)\left[x^2-2ax\cos\frac{2\pi}{n}+a^2\right]\left[x^2-2ax\cos\frac{4\pi}{n}+a^2\right]\ldots$$

$$\left[x^2-2ax\cos\frac{(n-1)\pi}{n}+a^2\right],$$

wie man leicht sieht, wenn man zwei auf einander folgende Faktoren multiplizirt.
Für ein gerades n eben so:

$$x^n-a^n=(x^2-a^2)\left(x^2-2\,a\,x\cos\frac{2\pi}{n}+a^2\right)\left(a^2-2ax\cos\frac{4\pi}{n}+a^2\right)\ldots$$
$$\left(x^2-2\,a\,x\cos\frac{(n-2)\pi}{n}+a^2\right).$$

Ganz in derselben Weise ist bei positivem a:

$$x^n+a^n=(x+a)\left(x^2-2ax\cos\frac{\pi}{n}+a^2\right)\left(x^2-2ax\cos\frac{3\pi}{n}+a^2\right)\ldots$$
$$\left(x^2-2\,a\,x\cos\frac{n-2}{n}\pi+a^2\right),$$

für ein ungerades n, und

$$x^n+a^n=\left(x^2-2\,a\,x\cos\frac{\pi}{n}+a^2\right)\left(x^2-2\,a\,x\cos\frac{3\pi}{n}+a^2\right)\ldots$$
$$\left(x^2-2\,a\,x\cos\frac{(n-1)\pi}{n}+a^2\right)$$

für ein gerades n.

V. Es ist von Interesse, die verschiedenen Formen zu betrachten, die Größen zukommen, die scheinbar dieselben sind. So sind, für ein positives c, der gewöhnlichen Algebra die Formen $(\sqrt[n]{c})^r$ und $\sqrt[n]{c^r}$ gleichbedeutend. Nicht so ist es für unsern jetzigen Standpunkt. n und r als ganze positive Zahlen aufgefaßt, ist:

$$(\sqrt[n]{c})^r=\left[c^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{2m\pi}{n}+i\sin\frac{2m\pi}{n}\right)\right]^r=$$
$$c^{\frac{r}{n}}\left(\cos\frac{2mr\pi}{n}+i\sin\frac{2mr\pi}{n}\right),\ m=0,1,\ldots n-1.$$

Diese Form hat n verschiedene Werthe, wenn r und n theilerfremd sind (d. h. keinen gemeinschaftlichen Theiler, außer 1, haben); haben aber r und n den größten gemeinschaftlichen Theiler α, so hat diese Form nur $\frac{n}{\alpha}$ verschiedene Werthe.

Die Form $\sqrt[n]{c^r}=(c^r)^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{2m\pi}{n}+i\sin\frac{2m\pi}{n}\right),\ m=0,1,\ldots n-1$ hat immer n verschiedene Werthe.
Und ähnlich in andern Fällen.

VI. Man hat oben gesehen, daß

$$\sqrt[n]{a+bi}=r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\alpha+2m\pi}{n}+i\sin\frac{\alpha+2m\pi}{n}\right),\ m=0,\ 1,\ \ldots\ n-1.$$

Daraus ergibt sich, wenn man das im zweiten Abschnitt II., Formel (2) und (3) Ausgesprochene beachtet, daß für ein ganzes, positives oder negatives, k:

$$\left(\sqrt[n]{(a+b\,i)}\right)^k = r^{\frac{k}{n}}\left(\cos\frac{k}{n}(\alpha+2m\pi)+i\sin\frac{k}{n}(\alpha+2m\pi)\right),$$
$m=0,\ 1,\ \ldots\ n-1.$

VII. Bezeichnen wir den natürlichen Logarithmus (sechster Abschn. XIV) durch das Zeichen l, so ist, wenn $a+bi=r(\cos\alpha+i\sin\alpha)$:

$$l(a+b\,i)=l.\left(r(\cos\alpha+i\sin\alpha)\right)=$$
$$l\left(r\left(\cos(\alpha+2m\pi)+i\sin(\alpha+2m\pi)\right)\right)=$$
$$l\left(r\,e^{(2m\pi+\alpha)i}\right)=l(r)+(2m\pi+\alpha)i=l(\sqrt{a^2+b^2})+(2m\pi+\alpha)i,$$

worin m irgend eine ganze, positive oder negative, Zahl ist.

Daraus folgt, daß $l(a+bi)$ unendlich vieldeutig ist.

Man zieht daraus bei positivem c:

$$l(c\,i)=l(c)+\left(2m+\frac{1}{2}\right)\pi i,$$
$$l(i)=\left(2m+\frac{1}{2}\right)\pi\,i,\ l(-i)=\left(2m-\frac{1}{2}\right)\pi\,i,$$
$$l(c)=l(c)+2m\pi i,\ l(-c)=l(c)+(2m+1)\pi i,$$

wenn in der zweiten Seite mit $l(c)$ der gewöhnliche Logarithmus der Algebra bezeichnet wird. $m=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots$

Achter Abschnitt.

Die Binomialreihe. Folgerungen daraus.

I. Die im Allgemeinen ins Unendliche fortlaufende Reihe

$$1+\frac{m}{1}x+\frac{m(m-1)}{1.2}x^2+\ \ldots \qquad (1)$$

worin m und x ganz willkührlich, reell oder imaginär, sind, heißt die Binomialreihe.

Ist m ganz und positiv, so ist sie endlich und ihre Summe ist $(1+x)^m$. (Erster Abschnitt.) Wir wollen sie nur für den allgemeinern Fall betrachten, da x imaginär ist, und zwar $x = a + b\,i = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$, m dagegen reell.

II. Zunächst haben wir nun zu untersuchen, in wie ferne die Reihe (1), wenn sie unendlich ist, konvergirt.

Unter der gemachten Voraussetzung ist die Reihe:

$$1 + \frac{m}{1} r\cos\alpha + \frac{m(m-1)}{1.2} r^2 \cos 2\alpha + \ldots$$
$$+ i\left(\frac{m}{1} r\sin\alpha + \frac{m(m-1)}{1.2} r^2 \sin 2\alpha + \ldots\right)$$

und da die hier vorkommenden cos und sin die Einheit nicht übersteigen, so genügt die Untersuchung von

$$1 + \frac{m}{1} r + \frac{m(m-1)}{1.2} r^2 + \ldots \text{ (Sechster Abschn. VI.)}$$

Hier ist nun

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = -\frac{\frac{m(m-1)\ldots\ldots(m-n)}{1.2\ldots\ldots\ldots n+1} r^{n+1}}{\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1.2\ldots\ldots\ldots n} r^n} =$$

$$-\frac{m-n}{n+1} r = \left(\frac{n}{n+1} - \frac{m}{n+1}\right) r = r \text{ für } n = \infty.$$

(Was das Vorzeichen anbelangt, so sieht man ein, daß, da in der angeführten Stelle bloß positive Größen a_n betrachtet werden, man diejenigen Glieder obiger Reihe, die negativ sind, positiv zu machen hat, indem man $\cos n\alpha$ als negativ ansieht, z. B. wenn $\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1.2\ldots\ldots n}$ negativ ist, so setzt man für $\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1.\ 2\ldots\ldots\ldots n}\cos n\alpha$ nun $\left(-\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1.2\ldots\ldots n}\right)$ $(-\cos n\alpha)$; zugleich wird man sehen, daß, sobald einmal n gehörig groß ist, dieses Negativsein abwechselnd eintritt).

Die Größe $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ nähert sich also, für ein unendliches n, der Größe r und folglich ist die Reihe (1) konvergent, wenn $r < 1$, divergent, wenn $r > 1$.

III. Sei $\varphi(m)$ die Summe der Reihe (1), in so ferne sie konvergent ist, $\varphi(n)$, $\varphi(m+n)$ die Summen ähnlicher konvergenter Reihen, in denen n, m+n an die Stelle von m gesetzt wurde. Alsdann ist, wenn man $\varphi(m)$ mit $\varphi(n)$ multiplizirt, der Koeffizient von x^r:

$$\frac{m(m-1)\ldots(m-r+1)}{1.2\ldots\ldots r}+\frac{n}{1}.\frac{m(m-1)\ldots(m-r+2)}{1.2\ldots\ldots(r-1)}+\frac{n(n-1)}{1.2}.\frac{m(m-1)\ldots(m-r+3)}{1.2\ldots(r-2)}+\ldots+\frac{n(n-1)\ldots(n-r+1)}{1.2\ldots\ldots r}$$

Diese Größe ist aber nach (6) des ersten Abschnitts:

$$\frac{(m+n)(m+n-1)\ldots(m+n-r+1)}{1.2\ldots\ldots r}.$$

Daraus ergibt sich, daß (XII. des sechsten Abschn. damit zusammengehalten)

$$\varphi(m).\varphi(n)=\varphi(m+n). \qquad (2).$$

Sei nun die Summe der Reihe (1)$=P+Qi=R(\cos S+i\sin S)$, so ist $R=f(m)$, $S=F(m)$, also folgt aus (2):

$$f(m).f(n)\Big[\cos\Big(F(m)+F(n)\Big)+i\sin\Big(F(m)+F(n)\Big)\Big]=$$
$$f(m+n)\Big[\cos F(m+n)+i\sin F(m+n)\Big],$$

woraus:

$$f(m).f(n)=f(m+n)$$
$$F(m)+F(n)=F(m+n)+2p\pi, \qquad (3)$$

wo p eine ganze, positive oder negative Zahl ist.

Aus der letzten dieser Gleichungen folgt nach III. des dritten Abschnitts:

$$F(m)=km+2p\pi, \qquad (4)$$

und aus der ersten, wenn man wie in II. des siebenten Abschnitts verfährt, also $f(m)=e^{\psi(m)}$ setzt:

$$\psi(m)=hm,\ f(m)=e^{hm}. \qquad (5)$$

In den Gleichungen (4) und (5) sind k und h noch zu bestimmende, von m aber nicht abhängende Größen.

Die Summe der Reihe (1) ist also

$$e^{hm}(\cos km+i\sin km).$$

Sei nun m=1, so ist also

$$e^h(\cos k+i\sin k)=1+x=1+r\cos\alpha+i\,r\sin\alpha$$

also

$$e^h\cos k=1+r\cos\alpha,$$
$$e^h\sin k=r\sin\alpha,$$

woraus zunächst, wenn man quadrirt und addirt:

$$e^{2h}=1+2r\cos\alpha+r^2,\ h=l.(\sqrt{1+2r\cos\alpha+r^2})$$

Dann ist

$$\operatorname{tg}k=\frac{r\sin\alpha}{1+r\cos\alpha},\ k=\operatorname{arc}\left(\operatorname{tg}=\frac{r\sin\alpha}{1+r\cos\alpha}\right)+n\pi, \qquad (6)$$

wenn man durch $\operatorname{arc}\left(\operatorname{tg}=\frac{r\sin\alpha}{1+r\cos\alpha}\right)$ den dem Zahlwerthe nach kleinsten Bogen bezeichnet, dessen Tangente $=\frac{r\sin\alpha}{1+r\cos\alpha}$; n ist eine ganze Zahl.

Um n in (6) zu bestimmen, lasse man in (6) $r=0$ werden. Alsdann ist $h=0$, $k=n\pi$, also da dann (1) gleich 1 ist:

$$1=\cos(mn\pi)+i\sin mn\pi,\ \sin mn\pi=0$$
$$\cos mn\pi=1,$$

folglich $mn\pi=2p\pi$ oder 0, d. h. $n=\frac{2p}{m}$ oder 0, wo p eine ganze Zahl ist. Da aber m beliebig ist, n eine ganze Zahl, so wird nicht immer $n=\frac{2p}{m}$ sein können, folglich wird $n=0$ sein.

Man kann Dies auch noch in folgender Weise zeigen, die zugleich einige andere Resultate ergibt. Da die Summe der Reihe (1) gleich $e^{hm}(\cos km+i\sin km)$, so ist

$$e^{hm}\cos km=1+\frac{m}{1}r\cos\alpha+\frac{m(m-1)}{1.2}r^2\cos2\alpha+\ldots$$

$$e^{hm}\sin km=mr\sin\alpha+\frac{m(m-1)}{1.2}r^2\sin2\alpha+\ldots$$

also

$$\frac{e^{hm}\cos km-1}{m}=r\cos\alpha+\frac{m-1}{2}r^2\cos2\alpha+\ldots$$

$$\frac{e^{hm}\sin km}{m}=r\sin\alpha+\frac{m-1}{2}r^2\sin2\alpha+\ldots$$

Setzt man in diesen Formeln für e^{hm}, $\cos km$, $\sin km$ ihre Werthe aus (1) und (21) des siebenten Abschnitts, und läßt dann, nachdem man mit m dividirt hat, $m=0$ werden, so werden die ersten Seiten dieser Gleichungen zu h und k, so daß

$$h=r\cos\alpha-\frac{r^2}{2}\cos2\alpha+\frac{r^3}{3}\cos3\alpha-\ldots$$

$$h=r\sin\alpha-\frac{r^2}{2}\sin2\alpha+\frac{r^3}{3}\sin3\alpha-\ldots \qquad (7)$$

Nun wird also k zu Null für $r=0$, während nach (6) k zu $n\pi$ wird für $r=0$. Folglich ist $n=0$.

Aus (7) hat man mithin:

$$l\left(\sqrt{1+2r\cos\alpha+r^2}\right)=r\cos\alpha-\frac{r^2}{2}\cos 2\alpha+\frac{r^3}{3}\cos 3\alpha-\ldots$$

$$\operatorname{arc}\left(tg=\frac{r\sin\alpha}{1+r\cos\alpha}\right)=r\sin\alpha-\frac{r^2}{2}\sin 2\alpha+\frac{r^3}{3}\sin 3\alpha-\ldots \quad (8),\ r<1.$$

Daraus folgt nun endlich, daß für $x=r(\cos\alpha+i\sin\alpha)$, $r<1$:

$$1+\frac{m}{1}x+\frac{m(m-1)}{1.\,2}x^2+\ldots=$$

$$\left(\sqrt{1+2r\cos\alpha+r^2}\right)^m\left(\cos m \operatorname{arc}\left(tg=\frac{r\sin\alpha}{1+r\cos\alpha}\right)+\right.$$

$$\left.i\sin m\operatorname{arc}\left(tg=\frac{r\sin\alpha}{1+r\cos\alpha}\right)\right) \quad (9)$$

worin natürlich $\left(\sqrt{1+2r\cos\alpha+r^2}\right)^m$ mit seinem gewöhnlichen algebraischen Werthe zu nehmen ist.

Für $\operatorname{arc}\left(tg=\frac{r\sin\alpha}{1+r\cos\alpha}\right)$ nimmt man den numerisch kleinsten Werth in (8) und (9).

IV. Es bleibt nun noch der Fall $r=1$ zu untersuchen. Dabei unterscheiden wir folgende Fälle:

1) $m\leqq-1$. Dann ist $\frac{m(m-1)\ldots\ldots(m-n+1)}{1.\,2\ldots\ldots n}$, wenn

$m=-1-g$, $g\geqq 0$, gleich $\frac{(-1-g)(-2-g)\ldots(-n-g)}{1.\,2\ldots\ldots n}$

$=(-1-g)\left(-1-\frac{g}{2}\right)\ldots\left(-1-\frac{g}{n}\right)$, was seinem

Zahlenwerthe nach $=(1+g)\left(1+\frac{g}{2}\right)\ldots\left(1+\frac{g}{n}\right)$ also

$\geqq 1$ ist. Das allgemeine Glied verschwindet also nicht für $n=\infty$, folglich ist die Reihe divergent. (Sechster Abschn. IV.)

2) $m>0$. Zuerst wollen wir bemerken, daß der Zahlwerth von

$\frac{m(m-1)\ldots(m-p+1)}{1.\,2\ldots p}$ gleich $\sqrt{\left(\frac{m}{1}\right)^2}\sqrt{\left(\frac{m-1}{2}\right)^2}\ldots$

$\sqrt{\left(\frac{m-p+1}{p}\right)^2}$ ist. Setzt man also $\sqrt{\left(\frac{m-s+1}{s}\right)^2} = a_s$,
so ist der Zahlwerth von

$$\frac{m(m-1)\ldots(m-p+1)}{1.2\ldots p} \text{ gleich } a_1 . a_2 \ldots a_p = A_p. \quad (10)$$

Daraus folgt, daß die Reihe (1) für diesen Fall sich darstellen läßt, wenn man nur auf die Zahlwerthe ihrer Glieder achtet, also $x=1$ setzt, durch:

$$1 + A_1 + A_2 + \ldots,$$

wo $A_1, A_2, \ldots$ das bedeuten, was aus A_p wird, wenn man $p=1,2,\ldots$ setzt.

Da der Werth von $a_p = \sqrt{\left(\frac{m-p+1}{p}\right)^2}$, so sieht man leicht, daß sobald das ganze positive p so gewählt wird, daß

$$p > m+1,$$

immer $\sqrt{\left(\frac{m-p+1}{p}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{p-m-1}{p}\right)^2} = \frac{p-m-1}{p} = 1 - \frac{m+1}{p}$

sein wird, so daß, unter der angeführten Bedingung für p:

$$a_p = 1 - \frac{m+1}{p}. \quad (11)$$

Nun ist, wie aus der Formel (9) folgt, für $r = \frac{1}{p} < 1$, $\alpha = 0$,

$$\left(1+\frac{1}{p}\right)^{-n} = 1 - \frac{n}{p} + \frac{n(n+1)}{1.2}\frac{1}{p^2} - \frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3}\frac{1}{p^3} + \ldots$$

$$= 1 - \frac{n}{p} + \frac{n(n+1)}{1.2p^2}\left(1 - \frac{n+2}{3p}\right) + \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{1.2.3.4.p^4}\left(1 - \frac{n+4}{5p}\right) + \ldots$$

Sei nun $n = m+1$, so ist $p > n$; $3p > 3m+3$, $n+2 = m+3$, also $\frac{n+2}{3p} < 1$, eben so $\frac{n+4}{5p} < 1, \ldots$ woraus folgt, daß

$$\left(1+\frac{1}{p}\right)^{-(m+1)} > 1 - \frac{m+1}{p},$$

$$\left(\frac{p+1}{p}\right)^{-(m+1)} > 1 - \frac{m+1}{p}, \left(\frac{p}{1+p}\right)^{m+1} > 1 - \frac{m+1}{p} \text{ oder } 1 - \frac{m+1}{p} < \left(\frac{p}{1+p}\right)^{m+1}.$$

Vergleicht man Dies mit (11), so folgt, daß

$$a_p < \left(\frac{p}{1+p}\right)^{m+1}$$, was das ganze p sei, nur muß $p > m+1$ sein.

Daraus:

$$a_{p+1} \cdot a_{p+2} \cdot \cdot \cdot a_{p+n} < \left(\frac{p+1}{p+2}\right)^{m+1} \cdot \left(\frac{p+2}{p+3}\right)^{m+1} \cdot \cdot \cdot \cdot \left(\frac{p+n}{p+n+1}\right)^{m+1} \text{ d. h. } < \left(\frac{p+1}{p+n+1}\right)^{m+1}$$

also (10):

$$A_{p+n} < a_1 a_2 \ldots a_p \left(\frac{p+1}{p+n+1}\right)^{m+1}, \quad n=1,2,3,\ldots$$

$$A_p + A_{p+1} + \ldots + A_{p+n} < a_1 a_2 \ldots a_p \left[\left(\frac{1}{p+1}\right)^{m+1} + \left(\frac{1}{p+2}\right)^{m+1} + \ldots + \left(\frac{1}{p+n+1}\right)^{m+1}\right] \cdot (p+1)^{m+1}$$

Nach dem, was man im sechsten Abschnitt VII. gesehen, ist die eingeklammerte Reihe, da $m+1>1$, konvergent, wenn $n=\infty$, hat also eine bestimmte Summe P. Also ist, wenn $n=\infty$:

$$A_p + A_{p+1} + A_{p+2} + \ldots < a_1 a_2 \ldots a_p \cdot (p+1)^{m+1} \cdot P,$$

$$1 + A_1 + A_2 + A_3 + \ldots < 1 + A_1 + A_2 + \ldots + A_{p-1} + a_1 a_2 \ldots a_p P \cdot (p+1)^{m+1},$$

d. h. diese Reihe ist konvergent, und folglich, wie man nach dem sechsten Abschnitt leicht begreifen wird, um so mehr die vorgelegte für $r=1$.

3) Sei $m > -1$ und < 0.

Da hier $x = \cos\alpha + i\sin\alpha$, so sei

$$1 + mx + \frac{m(m-1)}{1.2}x^2 + \ldots + \frac{m.(m-1)\ldots(m-n+1)}{1.2\ldots n}x^n = P_n, \quad (12)$$

so ist, wenn man mit $1+x$ multiplizirt, wie man leicht sieht:

$$1 + (m+1)x + \frac{(m+1)m}{1.2}x^2 + \ldots + \frac{(m+1)m\ldots(m-n+2)}{1.2\ldots n}x^n = P_n(1+x) - \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1.2\ldots n}x^{n+1}$$

$$P_n = \frac{1+(m+1)x+\frac{(m+1)mx^2}{1.2}+\ldots+\frac{(m+1)m\ldots(m-n+2)}{1.2\ldots n}x^n}{1+x} +$$

$$\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1.2\ldots\ldots n} \cdot \frac{x^{n+1}}{1+x}. \qquad (13)$$

Läßt man nun n unendlich wachsen, so wird, da $m+1$ jetzt >1, die Größe $1+\frac{m+1}{1}x+\ldots\frac{(m+1)m\ldots(m-n+2)}{1.2\ldots n}x^n$ sich nach dem zweiten Falle einer bestimmten Größe a nähern, ferner ist $\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1.2\ldots n}x^{n+1}$ jedenfalls endlich $= b$, so daß

$$P_\infty = \frac{a}{1+x} - \frac{b}{1+x} = \frac{a-b}{1+x}$$

und folglich die Reihe (12) für ein unendliches n eine bestimmte Summe hat, d. h. konvergirt, wenn nicht $1+x=0$, d. h. $\cos\alpha=-1$, welcher Fall mithin ausgeschlossen ist.

In allen den Fällen, in denen für $r=1$ die vorgelegte Reihe konvergirt, wird nun, gemäß IX des sechsten Abschnitts, die Formel (9) auch ihre Summe geben, was man auch leicht unmittelbar einsehen wird, wenn man die Schlüsse uochmals überschaut, die zu jener Formel geführt haben.

V. Wir sind also nun zu folgendem Ergebniß gekommen:

$$1+\frac{m}{1}(a+bi)+\frac{m(m-1)}{1.2}(a+bi)^2+\ldots=\left((1+a)^2+b^2\right)^{\frac{m}{2}}$$

$$\left[\cos m \operatorname{arc}\left(tg=\frac{b}{1+a}\right)+i\sin m \operatorname{arc}\left(tg=\frac{b}{1+a}\right)\right], \qquad (9)$$

wenn $\sqrt{a^2+b^2}<1$, was auch m sei; oder wenn $\sqrt{a^2+b^2}=1$, und $m>0$; oder wenn $\sqrt{a^2+b^2}=1$ und $m>-1$, <0, wenn nicht zugleich $a=-1$, also $b=0$ ist. In allen andern Fällen ist das Ergebniß (9) unzulässig; nur macht der Fall, da m eine ganze positive Zahl ist, davon eine Ausnahme, da (9) dann für jedes r und α gilt.

Die Formeln

$$l\left(\sqrt{1+2r\cos\alpha+r^2}\right)=r\cos\alpha-\frac{r^2}{2}\cos 2\alpha+\frac{r^3}{3}\cos 3\alpha-\ldots$$

$$\operatorname{arc}\left(tg=\frac{r\sin\alpha}{1+r\cos\alpha}\right)=r\sin\alpha-\frac{r^2}{2}\sin 2\alpha+\frac{r^3}{3}\sin 3\alpha-\ldots, (8)$$

gelten für jedes α, wenn $r<1$; ist $r=1$, so darf nicht $\cos\alpha=-1$ sein.

VI. Sei b=0 in (9), so findet sich

$$1+\frac{m}{1}a+\frac{m(m-1)}{1.2}a^2+\ldots=(1+a)^m, \qquad (14)$$

wenn m positiv und ganz, was a sei; wenn $a^2<1$, was m sei; für a=1, wenn $m>-1$, und für $a=-1$, wenn $m>0$.

Daraus folgt für $a=\pm 1$:

$$1+\frac{m}{1}+\frac{m(m-1)}{1.2}+\ldots=2^m,\ m>-1,$$

$$1-\frac{m}{1}+\frac{m(m-1)}{1.2}-\ldots=0,\ m>0, \qquad (15)$$

welches die Verallgemeinerung der Formeln (4) des ersten Abschn. ist.

VII. Setzt man in (9) $a+bi=r(\cos\alpha+i\sin\alpha)$ und dann die reellen und imaginären Theile gleich (zweiter Abschn. III.), so erhält man:

$$1+rm\cos\alpha+r^2.\frac{m(m-1)}{1.2}\cos 2\alpha+r^3.\frac{m(m-1)(m-2)}{1.\ 2.\ \ 3}\cos 3\alpha+\ldots$$

$$=(1+2r\cos\alpha+r^2)^{\frac{m}{2}}\cos m.\operatorname{arc}\left(\operatorname{tg}=\frac{r\sin\alpha}{1+r\cos\alpha}\right),$$

$$rm\sin\alpha+r^2.\frac{m(m-1)}{1.2}\sin 2\alpha+r^3.\frac{m(m-1)(m-2)}{1.\ 2.\ \ 3}\sin 3\alpha+\ldots$$

$$=(1+2r\cos\alpha+r^2)^{\frac{m}{2}}\sin m.\operatorname{arc}\left(\operatorname{tg}=\frac{r\sin\alpha}{1+r\cos\alpha}\right) \qquad (16)$$

für jedes m und α, wenn $r<1$; für $m>0$, $r=1$, was auch α sei; für $m>-1$, $r=1$, wenn nicht $\cos\alpha=-1$; für ein ganzes positives m gelten diese Formeln allgemein.

VIII. Man sieht leicht, wie die Formel (14) sich zu näherungsweiser Berechnung anwenden läßt.

So ist für $a^2<1$:

$$\sqrt{1+a}=1+\frac{1}{2}a-\frac{1}{1.2.4}a^2+\frac{1.3}{1.2.3.2^3}a^3-\ldots \text{ u. s. f.}$$

Auch läßt sich eine Umgestaltung mit ihr vornehmen, die sie oft noch brauchbarer macht. Sei nämlich $m=-n$, $a=\frac{-b}{1+b}$, so wird wenn $b>0$ und $<\infty$, d. h. endlich, immer $a^2<1$ sein, also die Formel für jedes n gelten. Alsdann ist aber $(1+a)^m=\left(1-\frac{b}{1+b}\right)^{-n}$ $=\left(\frac{1}{1+b}\right)^{-n}=(1+b)^n$, also, was auch das reelle n sei:

$$(1+b)^n=1+\frac{n}{1}\left(\frac{b}{1+b}\right)+\frac{n(n+1)}{1.2}\left(\frac{b}{1+b}\right)^2+$$
$$\frac{n(n+1)(n+2)}{1.\ 2.\ \ 3}\left(\frac{b}{1+b}\right)^3+\ldots,\ b>0 \text{ und endlich.} \quad (17)$$

Daraus z. B.

$$\sqrt{1+b}=1+\frac{1}{2}\frac{b}{1+b}+\frac{1.3}{2.4}\left(\frac{b}{1+b}\right)^2+\frac{1.3.5}{2.4.6}\left(\frac{b}{1+b}\right)^3+$$
$$\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\left(\frac{b}{1+b}\right)^4+\ldots,\ b>0.$$
$$\sqrt[3]{1+b}=1+\frac{1}{3}\left(\frac{b}{1+b}\right)+\frac{1.4}{3.6}\left(\frac{b}{1+b}\right)^2+\frac{1.4.7}{3.6.9}\left(\frac{b}{1+b}\right)^3$$
$$+\ldots,\ b>0.$$

Neunter Abschnitt.

Die Reihe für den natürlichen Logarithmus und für arc (tg=x).

I. Man hat in den Formeln (8) des vorigen Abschnitts gesehen, daß:

$$l\sqrt{1+2r\cos\alpha+r^2}=r\cos\alpha-\frac{1}{2}r^2\cos2\alpha+\ldots$$
$$\text{arc}\left(\text{tg}=\frac{r\sin\alpha}{1+r\cos\alpha}\right)=r\sin\alpha-\frac{1}{2}r^2\sin2\alpha+\ldots,$$

$r<1$, oder wenn $r=1$, so darf nicht $\cos\alpha=-1$ sein.

Daraus folgt, wenn $x=r(\cos\alpha+i\sin\alpha)$:

$$l\sqrt{1+2r\cos\alpha+r^2}+i\,\text{arc}\left(\text{tg}=\frac{r\sin\alpha}{1+r\cos\alpha}\right)=\left(r\cos\alpha-\frac{1}{2}r^2\cos2\alpha+.\right)$$
$$+i\left(r\sin\alpha-\frac{1}{2}r^2\sin2\alpha+\ldots\right)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots \quad (1)$$

wodurch nun diese Reihe summirt ist. Es muß also $r<1$ sein, oder wenn $r=1$ ist, darf nicht $\cos\alpha=-1$ sein.

II. Setzt man $r=1$, wobei nicht $\cos\alpha=-1$ sein darf, so findet sich:

$$l\sqrt{2+2\cos\alpha}=l\left(\sqrt{4\cos^2\frac{\alpha}{2}}\right)=\cos\alpha-\frac{1}{2}\cos 2\alpha+\frac{1}{3}\cos 3\alpha-\ldots$$

$$\text{arc}\left(\text{tg}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}\right)=\text{arc}\left(\text{tg}=\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}\right)=$$

$$\text{arc}\left(\text{tg}=\text{tg}\frac{\alpha}{2}\right)=\sin\alpha-\frac{1}{2}\sin 2\alpha+\frac{1}{3}\sin 3\alpha-\ldots \quad (2)$$

Ist in diesen Formeln α zwischen $-\pi$ und π enthalten, d. h. $\alpha>-\pi$ und $<\pi$, so ist nicht $\cos\alpha=-1$, und dann ist $\sqrt{4\cos^2\frac{\alpha}{2}}=2\cos\frac{\alpha}{2}$, da jetzt $\cos\frac{\alpha}{2}$ positiv ist, zugleich ist $\text{arc}\left(\text{tg}=\text{tg}\,\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{\alpha}{2}$, da jetzt $\frac{\alpha}{2}$ der numerisch kleinste Werth des Bogens ist. Also hat man:

$$\left.\begin{aligned}&\cos\alpha-\frac{1}{2}\cos 2\alpha+\frac{1}{3}\cos 3\alpha-\ldots=l.\left(2\cos\frac{\alpha}{2}\right),\\&\sin\alpha-\frac{1}{2}\sin 2\alpha+\frac{1}{3}\sin 3\alpha-\ldots=\frac{\alpha}{2}. \qquad (3)\end{aligned}\right\}-\pi<\alpha<+\pi.$$

Setzt man hier $\alpha=\pi-\beta$, so ist:

$$\cos\beta+\frac{1}{2}\cos 2\beta+\frac{1}{3}\cos 3\beta+\ldots=-l\left(2\sin\frac{\beta}{2}\right)$$

$$\sin\beta+\frac{1}{2}\sin 2\beta+\frac{1}{3}\sin 3\beta+\ldots=\frac{\pi-\beta}{2}, \qquad (4),\ 2\pi>\beta>0.$$

III. Setzt man in (1) $\sin\alpha=0$, $r\cos\alpha=a$, so daß für ein positives a: $\alpha=0$, $r=a$, für ein negatives a: $r=-a$, $\alpha=\pi$, so ist

$$l(1+a)=a-\frac{a^2}{2}+\frac{a^3}{3}-\frac{a^4}{4}+\ldots,\ a^2<1 \text{ oder } a=1.$$

Deßgleichen

$$l(1-a)=-\left(a+\frac{a^2}{2}+\frac{a^3}{3}+\ldots\right),\ a^2<1, \text{ oder } a=-1.$$

Zieht man Beides von einander ab:

$$l\left(\frac{1+a}{1-a}\right)=2\left(a+\frac{a^3}{3}+\frac{a^5}{5}+\ldots\right),\ a^2<1.$$

Sei $\frac{1+a}{1-a}=b$, $a=\frac{b-1}{b+1}$, also damit $a^2<1$, $b>0$:

$$l(b)=2\left[\frac{b-1}{b+1}+\frac{1}{3}\left(\frac{b-1}{b+1}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{b-1}{b+1}\right)^5+\ldots\right];\ b>0.$$

wodurch man den natürlichen Logarithmus von b finden kann. Aus dem natürlichen ergeben sich dann die briggischen. (Sechster Abschn. XIV.)

IV. Sei $x=a+bi$, so ist $xi=-b+ai$, also hat man nach (1):

$$(xi)-\frac{1}{2}(xi)^2+\frac{1}{3}(xi)^3\ldots=l\sqrt{1+2r\cos\alpha+r^2}+$$

$$i\,\text{arc}\left(tg=\frac{r\sin\alpha}{1+r\cos\alpha}\right),\ r<1,$$ oder wenn $r=1$, so darf $\cos\alpha$ nicht $=-1$ sein.

Hier ist nun $r=\sqrt{a^2+b^2}$, $r\cos\alpha=-b$, $r\sin\alpha=a$, d. h. also es muß $\sqrt{a^2+b^2}<1$, oder wenn $\sqrt{a^2+b^2}=1$, so darf nicht $b=1$ sein.

Deßgleichen ist $-xi=+b-ai$, also

$$-(xi)-\frac{(xi)^2}{2}-\frac{(xi)^3}{3}-\ldots=l\sqrt{1+2r\cos\alpha+r^2}+$$

$$i\,\text{arc}\left(tg=\frac{r\sin\alpha}{1+r\cos\alpha}\right);$$

hier ist $r=\sqrt{a^2+b^2}$, $r\cos\alpha=b$, $r\sin\alpha=-a$; also muß $\sqrt{a^2+b^2}<1$, oder wenn $\sqrt{a^2+b^2}=1$, so darf nicht $b=-1$ sein. Subtrahirt man beide Reihen, so erhält man, wenn man jeweils die entsprechenden Werthe von r und $\cos\alpha$, $\sin\alpha$ einsetzt:

$$2\left(\frac{x}{1}-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\ldots\right)i$$

$$=l\left(\frac{\sqrt{(1-b)^2+a^2}}{\sqrt{(1+b)^2+a^2}}\right)+i\,\text{arc}\left(tg=\frac{a}{1-b}\right)-$$

$$i\,\text{arc}\left(tg=\frac{-a}{1+b}\right)$$

$$=-l\left(\sqrt{\frac{(1+b)^2+a^2}{(1-b)^2+a^2}}\right)+i\left[\text{arc}\left(tg=\frac{a}{1-b}\right)+\right.$$

$$\left.\text{arc}\left(tg=\frac{a}{1+b}\right)\right]$$

$$= -l\left(\sqrt{\frac{(1+b)^2+a^2}{(1-b)^2+a^2}}\right) + i \, \mathrm{arc}\left(tg = \frac{2a}{1-b^2-a^2}\right)$$

da bekanntlich $\mathrm{arc}(tg=m) + \mathrm{arc}(tg=n) = \mathrm{arc}\left(tg = \frac{m+n}{1-mn}\right)$.

Also ist für $x = a + bi$:

$$\frac{x}{1} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots = \frac{1}{2}\mathrm{arc}\left(tg = \frac{2a}{1-b^2-a^2}\right) + \frac{i}{4} \, l\left(\frac{(1+b)^2+a^2}{(1-b)^2+a^2}\right); \quad (5)$$

wenn $\sqrt{a^2+b^2} < 1$; ist $\sqrt{a^2+b^2} = 1$, so darf nicht $a = 0$ sein.

Für $b = 0$ folgt hieraus:

$$\frac{a}{1} - \frac{a^3}{3} + \frac{a^5}{5} - \frac{a^7}{7} + \ldots = \frac{1}{2}\mathrm{arc}\left(tg = \frac{2a}{1-a^2}\right) = \mathrm{arc}(tg=a);\ a^2 < 1. \quad (6)$$

und für $a = 1$:

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots = \frac{\pi}{4}. \quad (7)$$

Man kann aus der Formel (7) leicht eine andere, mehr brauchbare, ableiten. Es ist nämlich nach (7):

$$\frac{\pi}{4} = \left(1 - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7}\right) + \ldots = \frac{2}{1.3} + \frac{2}{5.7} + \frac{2}{9.11} + \ldots$$

und

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) - \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{9}\right) - \ldots = 1 - \frac{2}{3.5} - \frac{2}{7.9} - \ldots$$

Dividirt man in beiden Gleichungen mit 2 und addirt sie:

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} + \frac{4}{1.3.5} + \frac{4}{5.7.9} + \frac{4}{9.11.13} + \ldots$$

oder

$$\frac{\pi}{16} = \frac{1}{8} + \frac{1}{1.3.5} + \frac{1}{5.7.9} + \frac{1}{9.11.13} + \ldots$$

Zugleich folgt aus (5), wenn $a + bi = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$;

$$r\cos\alpha - \frac{1}{3}r^3\cos3\alpha + \frac{1}{5}r^5\cos5\alpha - \ldots =$$

$$\frac{1}{2}\mathrm{arc}\left(\mathrm{tg} = \frac{2r\cos\alpha}{1-r^2}\right)$$

$$r\sin\alpha - \frac{1}{3}r^3\sin3\alpha + \frac{1}{5}r^5\sin5\alpha - \ldots =$$

$$\frac{1}{4}l\left(\frac{1+2r\sin\alpha+r^2}{1-2r\sin\alpha+r^2}\right), \quad (8)$$

wenn (das positive) $r < 1$, oder wenn $r = 1$ und nicht zugleich $\sin^2\alpha = 1$.

Daraus für $r = 1$:

$$\cos\alpha - \frac{1}{3}\cos3\alpha + \frac{1}{5}\cos5\alpha - \ldots = \frac{\pi}{4},$$

$$\sin\alpha - \frac{1}{3}\sin3\alpha + \frac{1}{5}\sin5\alpha - \ldots = \frac{1}{4}l\left(\frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}\right), \quad (9)$$

$$-\frac{\pi}{2} < \alpha < +\frac{\pi}{2}.$$

α muß in den gegebenen Gränzen sein, weil nicht $\sin^2\alpha = 1$ werden darf, und man für $\mathrm{arc}\left(\mathrm{tg} = \frac{2r\cos\alpha}{1-r^2}\right)$ gesetzt hat $+\frac{\pi}{4}$, wenn $r=1$, d. h. $\cos\alpha$ als positiv angenommen hat.

V. Es dürfte hier nicht unpassend sein, da die Formel (7) zur Berechnung von π nicht rasch genug konvergirt, eine andere anzugeben.

Sei A ein Bogen, dessen Tangente $= \frac{1}{5}$, B einer, dessen Tangente $= \frac{1}{239}$, so ist $\mathrm{tg}\,A = \frac{1}{5}$, $\mathrm{tg}\,2A = \frac{2\,\mathrm{tg}A}{1-\mathrm{tg}^2A} = \frac{5}{12}$, $\mathrm{tg}\,4A = \frac{2\,\mathrm{tg}\,2A}{1-\mathrm{tg}^2 2A} = \frac{120}{119}$.

Zugleich ist $\mathrm{tg}(4A-B) = \frac{\mathrm{tg}4A - \mathrm{tg}B}{1+\mathrm{tg}4A\,\mathrm{tg}B} = 1$, also $4A - B = \frac{\pi}{4}$.

Nun ist nach (6):

$$A = \mathrm{arc}\left(\mathrm{tg} = \frac{1}{5}\right) = \frac{1}{5} - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5^3} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5^5} - \ldots$$

$$B = \mathrm{arc}\left(\mathrm{tg} = \frac{1}{239}\right) = \frac{1}{239} - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{239^3} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{239^5} - \ldots$$

also

$$\frac{\pi}{4} = 4\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3}\frac{1}{5^3} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5^5} - \ldots\right) -$$
$$\left(\frac{1}{239} - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{239^3} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{239^5} - \ldots\right). \quad (10)$$

Man kann auch folgenden Satz zu diesem Zwecke aufstellen:

Seien a und b so gewählt, daß $a+b=n(1-ab)$ also $b=\frac{n-a}{1+na}$, so ist

$$\operatorname{arc}(tg=a)+\operatorname{arc}(tg=b)=\operatorname{arc}\left(tg=\frac{a+b}{1-ab}\right)=\operatorname{arc}(tg=n). (11)$$

Ist also $n=1$, d. h. $b=\frac{1-a}{1+a}$, so ist

$$\frac{\pi}{4}=\operatorname{arc}(tg=a)+\operatorname{arc}\left(tg=\frac{1-a}{1+a}\right).$$

Ist $n=\sqrt{2}-1$, also $b=\frac{\sqrt{2}-1-a}{1+(\sqrt{2}-1)a}$, so ist

$$\frac{\pi}{8}=\operatorname{arc}(tg=a)+\operatorname{arc}\left(tg=\frac{\sqrt{2}-1-a}{1+(\sqrt{2}-1)a}\right).$$

u. s. f.

Zehnter Abschnitt.

Die Sinus und Cosinus der Vielfachen eines Bogens.

I. Nach (VII) des achten Abschnitts findet sich (für r=1):

$$1+m\cos\alpha+\frac{m(m-1)}{1.2}\cos 2\alpha+\ldots=$$

$$(2+2\cos\alpha)^{\frac{m}{2}}\cos m\,\text{arc}\left(tg=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}\right)$$

$$=2^m\left(\cos^2\frac{\alpha}{2}\right)^{\frac{m}{2}}\cos\left[m\,\text{arc}\left(tg=tg\frac{\alpha}{2}\right)\right].$$

$$m\sin\alpha+\frac{m(m-1)}{1.\,2}\sin2\alpha+\ldots=$$

$$(2+2\cos\alpha)^{\frac{m}{2}}\sin m.\,\text{arc}\left(tg=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}\right)$$

$$=2^m\left(\cos^2\frac{\alpha}{2}\right)^{\frac{m}{2}}\sin\left[m.\text{arc}\left(tg=tg\frac{\alpha}{2}\right)\right],$$

oder wenn man 2α an die Stelle von α setzt:

$$1+m\cos2\alpha+\frac{m(m-1)}{1.\,2}\cos4\alpha+\ldots$$

$$=2^m(\cos^2\alpha)^{\frac{m}{2}}.\ \cos\left[m.\text{arc}(tg=tg\alpha)\right],$$

$$m\sin2\alpha+\frac{m(m-1)}{1.\,2}\sin4\alpha+\ldots$$

$$=2^m(\cos^2\alpha)^{\frac{m}{2}}\sin\left[m.\,\text{arc}(tg=tg\alpha)\right]. \qquad (1)$$

Die Formeln (1) gelten, was auch α sei, wenn $m>0$. Ist nicht $\cos2\alpha=-1$, so darf sogar nur $m>-1$ sein. Für arc ($tg=tg\,\alpha$) muß man den (numerisch) kleinsten Werth nehmen.

Was nun den Winkel α betrifft, so sind folgende Fälle zu unterscheiden:

$\alpha=2r\pi+x$,
$\alpha=(2r+1)\pi+x$, x zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $\frac{\pi}{2}$, r eine ganze positive Zahl.

Die Fälle, in denen α negativ ist, kommen leicht auf obige zurück.

II. Sei also $\alpha=2r\pi+x$, $-\frac{\pi}{2}<x<+\frac{\pi}{2}$. $x=\pm\frac{\pi}{2}$ ist ausgeschlossen, wenn m zwischen 0 und -1; für $m>0$ ist es noch zulässig.

In diesem Falle ist $\text{arc}(tg=tg\,\alpha)=x=\alpha-2r\pi$, $\cos\alpha$ positiv, also $(\cos^2\alpha)^{\frac{m}{2}}=\cos^m\alpha$, demnach:

$$1+m\cos2\alpha+\frac{m(m-1)}{1.\,2}\cos4\alpha+\ldots=$$

$$(2\cos\alpha)^m.\ \cos m(\alpha-2r\pi),$$

$$m\sin 2\alpha + \frac{m(m-1)}{1.\,2}\sin 4\alpha + \ldots\ldots = (2\cos\alpha)^m \sin m(\alpha - 2r\pi), \qquad (2)$$

Man multiplizire die erste Gleichung mit $\cos m\alpha$, die zweite mit $\sin m\alpha$, so erhält man durch Addition:

$$\cos m\alpha + \frac{m}{1}\cos(m-2)\alpha + \frac{m(m-1)}{1.\,2}\cos(m-4)\alpha + \ldots = (2\cos\alpha)^m \cos 2rm\pi. \qquad (3)$$

Deßgleichen, wenn man die erste mit $\sin m\alpha$, die zweite mit $\cos m\alpha$ multiplizirt und subtrahirt:

$$\sin m\alpha + \frac{m}{1}\sin(m-2)\alpha + \frac{m(m-1)}{1.\,2}\sin(m-4)\alpha + \ldots = (2\cos\alpha)^m \sin 2rm\pi. \qquad (4)$$

In den Formeln (2), (3), (4) ist:

$m>0$, $\alpha = 2r\pi + x$, $-\frac{\pi}{2} \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}$, r ganz und positiv $= 0, 1, 2, \ldots$

$$\left\{\begin{array}{l} m > -1,\ \alpha = 2r\pi + x,\ -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2},\ \text{r ganz und positiv.} \\ \text{und} \leqq 0. \end{array}\right.$$

III. Sei $\alpha = (2r+1)\pi + x$, x zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $\frac{\pi}{2}$, wie in II.

Alsdann ist $\text{arc}(\text{tg} = \text{tg}\alpha) = x = \alpha - (2r+1)\pi$; $\cos\alpha$ negativ, also $(\cos^2\alpha)^{\frac{m}{2}} = (-\cos\alpha)^m$, demnach:

$$1 + m\cos 2\alpha + \frac{m(m-1)}{1.\,2}\cos 4\alpha + \ldots = (-2\cos\alpha)^m \cos m(\alpha - \overline{2r+1}\pi),$$

$$m\sin 2\alpha + \frac{m(m-1)}{1.\,2}\sin 4\alpha + \ldots = (-2\cos\alpha)^m \sin m(\alpha - \overline{2r+1}\pi). \qquad (5)$$

Multiplizirt man ganz wie oben, so findet sich:

$$\cos m\alpha + \frac{m}{1}\cos(m-2)\alpha + \frac{m(m-1)}{1.\,2}\cos(m-4)\alpha + \ldots = (-2\cos\alpha)^m \cos(2r+1)m\pi,$$

$$\sin m\alpha + \frac{m}{1}\sin(m-2)\alpha + \frac{m(m-1)}{1.\,2}\sin(m-4)\alpha + \ldots = (-2\cos\alpha)^m \sin(2r+1)m\pi. \qquad (6)$$

In den Formeln (5) und (6) ist:

$$m>0,\ \alpha=(2r+1)\pi+x,\ -\frac{\pi}{2}\overset{=}{<}x\overset{=}{<}+\frac{\pi}{2},\ r=0,1,\ldots$$

$$\begin{cases} m>-1,\ \alpha=(2r+1)\pi+x,\ -\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}. \\ \text{und} \overset{=}{<} 0. \end{cases}$$

IV. Setzt man in den Formeln (1) $\frac{\pi}{2}-\alpha$ an die Stelle von α, so erhält man

$$1-m\cos2\alpha+\frac{m(m-1)}{1.2}\cos4\alpha-\ldots=$$

$$2^m(\sin^2\alpha)^{\frac{m}{2}}\cos\left[m\operatorname{arc}(\operatorname{tg}=\operatorname{cotg}\alpha)\right],$$

$$m\sin2\alpha-\frac{m(m-1)}{1.2}\sin4\alpha+\ldots=$$

$$2^m(\sin^2\alpha)^{\frac{m}{2}}\sin\left[m.\operatorname{arc}(\operatorname{tg}=\operatorname{cotg}\alpha)\right]. \quad (7)$$

für $m>-1$, wenn nicht $\cos2\alpha=1$, in welchem Falle $m>0$ sein muß.

Wesentlich in derselben Weise, wie dies oben mit den Formeln (1) geschehen, werden nun auch die Formeln (7) behandelt, und man wird ähnliche Formeln daraus erhalten.

V. Sei also $\alpha=2r\pi+x$, x zwischen 0 und π.

Alsdann ist $\operatorname{arc}(\operatorname{tg}=\operatorname{cotg}\alpha)=\operatorname{arc}(\operatorname{tg}=\operatorname{cotg}x)=\frac{\pi}{2}-x=$ $\left(2r+\frac{1}{2}\right)\pi-\alpha$; $\sin\alpha$ ist positiv, also $(\sin^2\alpha)^{\frac{m}{2}}=\sin^m\alpha$, woraus nun wie oben (2), (3) und (4) gefolgt sind:

$$1-m\cos2\alpha+\frac{m(m-1)}{1.2}\cos4\alpha-\ldots=$$

$$(2\sin\alpha)^m\cos.m\left(\left(2r+\frac{1}{2}\right)\pi-\alpha\right),$$

$$m\sin2\alpha-\frac{m(m-1)}{1.2}\sin4\alpha+\ldots=$$

$$(2\sin\alpha)^m\sin m\left(\left(2r+\frac{1}{2}\right)\pi-\alpha\right). \quad (8)$$

$$\cos m\alpha - m\cos(m-2)\alpha + \frac{m(m-1)}{1.\,2}\cos(m-4)\alpha - \ldots =$$

$$(2\sin\alpha)^m \cos\left(2r+\frac{1}{2}\right)m\pi,$$

$$\sin m\alpha - m\sin(m-2)\alpha + \frac{m(m-1)}{1.\,2}\sin(m-4)\alpha - \ldots =$$

$$(2\sin\alpha)^m \sin\left(2r+\frac{1}{2}\right)m\pi. \qquad (9)$$

Die Formeln (8) und (9) gelten, wenn

$$\left\{\begin{array}{l} m > -1,\ \alpha = 2r\pi + x,\ 0 < x < \pi,\ r \text{ positiv und ganz,} \\ \text{und } \leqq 0 \end{array}\right.$$

$$m > 0,\ \alpha = 2r\pi + x,\ 0 \leqq x \leqq \pi,\ r \text{ positiv und ganz.}$$

VI. Sei $\alpha = (2r+1)\pi + x$, x zwischen 0 und π.

Alsdann ist $\operatorname{arc}(\operatorname{tg} = \operatorname{cotg}\alpha) = \operatorname{arc}(\operatorname{tg} = \operatorname{cotg} x) = \frac{\pi}{2} - x =$

$\left(2r+\frac{3}{2}\right)\pi - \alpha$; $\sin\alpha$ ist negativ, also $(\sin^2\alpha)^{\frac{m}{2}} = (-\sin\alpha)^m$; folglich:

$$1 - m\cos 2\alpha + \frac{m(m-1)}{1.\,2}\cos 4\alpha - \ldots =$$

$$(-2\sin\alpha)^m \cos m\left(\left(2r+\frac{3}{2}\right)\pi - \alpha\right),$$

$$m\sin 2\alpha - \frac{m(m-1)}{1.\,2}\sin 4\alpha + \ldots =$$

$$(-2\sin\alpha)^m \sin.\, m\left(\left(2r+\frac{3}{2}\right)\pi - \alpha\right). \qquad (10)$$

$$\cos m\alpha - m\cos(m-2)\alpha + \frac{m(m-1)}{1.\,2}\cos(m-4)\alpha - \ldots =$$

$$(-2\sin\alpha)^m.\ \cos m\left(2r+\frac{3}{2}\right)\pi,$$

$$\sin m\alpha - m\sin(m-2)\alpha + \frac{m(m-1)}{1.\,2}\sin(m-4)\alpha - \ldots =$$

$$(-2\sin\alpha)^m \sin m\left(2r+\frac{3}{2}\right)\pi. \qquad (11)$$

Die Formeln (10) und (11) gelten, wenn

$$m > 0,\ \alpha = (2r+1)\pi + x,\ 0 \leqq x \leqq \pi,\ r \text{ positiv und ganz},$$

$$\left.\begin{array}{l} m > -1,\ \alpha = (2r+1)\pi + x,\ 0 < x < \pi.\ r \text{ positiv und ganz}. \\ \text{und} \leqq 0 \end{array}\right.$$

VII. Es ist klar, daß obige Formeln ohne irgend eine Einschränkung gelten, wenn m eine ganze positive Zahl ist. In diesem Falle hat man also:

$$\cos m\alpha + \frac{m}{1}\cos(m-2)\alpha + \frac{m(m-1)}{1.2}\cos(m-4)\alpha + \ldots + \cos m\alpha = (2\cos\alpha)^m,\ \cos\alpha > 0;$$

$$\sin m\alpha + \frac{m}{1}\sin(m-2)\alpha + \frac{m(m-1)}{1.2}\sin(m-4)\alpha + \ldots - \sin m\alpha = 0,\ \cos\alpha > 0. \quad (12)$$

Die letzte Formel ist ohnehin klar, da alle Glieder sich aufheben. In der ersten sind je zwei gleich weit von Anfang und Ende abstehende Glieder gleich, so daß eine weitere Zusammenziehung möglich ist, die aber dem Leser überlassen bleibe.

$$\left.\begin{array}{l} \cos m\alpha + \frac{m}{1}\cos(m-2)\alpha + \frac{m(m-1)}{1.2}\cos(m-4)\alpha + \ldots = (-2\cos\alpha)^m . (-1)^m, \\ \sin m\alpha + \frac{m}{1}\sin(m-2)\alpha + \frac{m(m-1)}{1.2}\sin(m-4)\alpha + \ldots = 0. \end{array}\right\} \cos\alpha < 0. \quad (13)$$

$$\left.\begin{array}{l} \cos m\alpha - m\cos(m-2)\alpha + \frac{m(m-1)}{1.2}\cos(m-4)\alpha - \ldots = (2\sin\alpha)^m . \cos\frac{m\pi}{2}, \\ \sin m\alpha - m\sin(m-2)\alpha + \frac{m(m-1)}{1.2}\sin(m-4)\alpha - \ldots = (2\sin\alpha)^m . \sin\frac{m\pi}{2}, \end{array}\right\} \sin\alpha > 0. (14)$$

$$\left.\begin{array}{l} \cos m\alpha - m\cos(m-2)\alpha + \frac{m(m-1)}{1.2}\cos(m-4)\alpha - \ldots = (-2\sin\alpha)^m \cos\frac{3m\pi}{2}, \\ \sin m\alpha - m\sin(m-2)\alpha + \frac{m(m-1)}{1.2}\sin(m-4)\alpha - \ldots = (-2\sin\alpha)^m \sin\frac{3m\pi}{2}, \end{array}\right\} \sin\alpha < 0. (15)$$

Die Formeln (12) und (13), sowie (14) und (15) sind identisch.

VIII. Es seien α und n reell, so ist (achter Abschn. V):

$$1+n(i\,tg\,\alpha)+\frac{n(n-1)}{1.\,2}(i\,tg\,\alpha)^2+\ldots=(1+tg^2\alpha)^{\frac{n}{2}}$$
$$\left[\cos n.\,arc(tg=tg\alpha)+i\sin n.\,arc(tg=tg\alpha)\right],$$

wenn $n>0$, $tg^2\alpha\overline{\underline{<}}1$; ist $\left\{\begin{array}{l}n>-1\\ \text{und}\ \overline{\underline{<}}0\end{array}\right.$, so muß $tg^2\alpha<1$ sein. Ist n ganz und positiv, so gilt die Formel für jedes α.

Sei nun α zwischen $-\frac{\pi}{4}$ und $+\frac{\pi}{4}$ enthalten, so geht $tg^2\alpha$ nicht über 1 hinaus, also ist dann, da $1+tg^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}$ und $\cos\alpha$ positiv, $arc(tg=tg\alpha)=\alpha$, wie man leicht findet:

$$1-\frac{n(n-1)}{1.\,2}tg^2\alpha+\frac{n(n-1)\,(n-2)\,(n-3)}{1.\ 2.\ 3.\ 4}tg^4\alpha-\ldots=$$
$$\frac{1}{\cos^n\alpha}\cos n\,\alpha,$$

oder:

$$\left.\begin{array}{l}\cos^n\alpha-\frac{n(n-1)}{1.\,2}\sin^2\cos^{n-2}\alpha+\frac{n(n-1)\,(n-2)\,(n-3)}{1.\ 2.\ 3.\ 4}\\ \quad\sin^4\alpha\cos^{n-4}\alpha-\ldots=\cos n\alpha,\\ n\cos^{n-1}\alpha\sin\alpha-\frac{n(n-1)\,(n-2)}{1.\,2.\,3}\cos^{n-3}\alpha\sin^3\alpha\\ \quad+\ldots=\sin n\,\alpha\end{array}\right\}\quad(16)$$

wenn $n>0$, $-\frac{\pi}{4}\overline{\underline{<}}\alpha\overline{\underline{<}}\frac{\pi}{4}$; ist $\left\{\begin{array}{l}n>-1\\ \text{und}\ \overline{\underline{<}}0\end{array}\right.$, so muß $-\frac{\pi}{4}<\alpha<\frac{\pi}{4}$ sein.

Man wird leicht noch andere Gränzen für α finden. Da aber nach den obigen Untersuchungen dies keinerlei Schwierigkeit unterliegt, so überlassen wir es dem Leser. Nur den Fall, da n ganz und positiv ist, wollen wir noch besonders untersuchen:

Sei zuerst $\alpha=2r\pi+x$, x zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $+\frac{\pi}{2}$, so ist $\cos\alpha$ positiv, also $(1+tg^2\alpha)^{\frac{n}{2}}=\frac{1}{\cos^n\alpha}$, $arc(tg=tg\alpha)=x=\alpha-2r\pi$, so daß man die Formeln (16) erhält, die also bei einem positiven ganzen n, für jedes α, bei dem $\cos\alpha>0$ ist, gelten. Sei dann $\alpha=(2r+1)\pi+x$,

x zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $+\frac{\pi}{2}$, so ist $\cos\alpha$ negativ, also $(1+\operatorname{tg}^2\alpha)^{\frac{n}{2}} = \frac{1}{(-\cos\alpha)^n}$, $\operatorname{arc}(\operatorname{tg}=\operatorname{tg}\alpha)=x=\alpha-(2r+1)\pi$, $\sin n.\operatorname{arc}(\operatorname{tg}=\operatorname{tg}\alpha) = \sin n(\alpha-\overline{2r+1}\pi)=(-1)^n\sin n\alpha$, $\cos n(\alpha-\overline{2r+1}\pi)=(-1)^n\cos n\alpha$ und man erhält abermals (16), die also für ein ganzes positives n bei jedem α gelten.

IX. Aus dem, was wir so eben hinsichtlich der Formeln (16) bei einem ganzen positiven n gesehen, folgt, daß wenn man $\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha$ setzt, zugleich $n=2m$ schreibt, man erhalten werde:

$$\cos 2m\alpha=a_0+a_2\sin^2\alpha+a_4\sin^4\alpha+\ldots+a_{2m}\sin^{2m}\alpha.$$

Folglich ist diese Reihe Null für $\alpha=\pm\frac{\pi}{4m}, \pm\frac{3\pi}{4m}, \pm\frac{5\pi}{4m}, \ldots \pm\frac{(2m-1)\pi}{4m}$, und kann also nach dem im vierten Abschnitt Gesagten dargestellt werden durch

$$k\left(\sin^2\alpha-\sin^2\frac{\pi}{4m}\right)\left(\sin^2\alpha-\sin^2\frac{3\pi}{4m}\right)\ldots\left(\sin^2\alpha-\sin^2\frac{(2m-1)\pi}{4m}\right)=\cos 2m\alpha.$$

Um k zu bestimmen, sei $\alpha=0$, so folgt leicht:

$$k=\frac{1}{\left(-\sin^2\frac{\pi}{4m}\right)\left(-\sin^2\frac{3\pi}{4m}\right)\ldots\left(-\sin^2\frac{(2m-1)\pi}{4m}\right)},$$

folglich

$$\cos 2m\alpha=\left(1-\frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\frac{\pi}{4m}}\right)\left(1-\frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\frac{3\pi}{4m}}\right)\ldots\left(1-\frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\frac{(2m-1)\pi}{4m}}\right).$$

Man setze nun $\frac{\alpha}{2m}$ an die Stelle von α, so erhält man:

$$\cos\alpha = \left(1 - \frac{\sin^2\frac{\alpha}{2m}}{\sin^2\frac{\pi}{4m}}\right)\left(1 - \frac{\sin^2\frac{\alpha}{2m}}{\sin^2\frac{3\pi}{4m}}\right) \cdot \cdot \cdot \cdot$$

$$\left(1 - \frac{\sin^2\frac{\alpha}{2m}}{\sin^2\frac{(2m-1)\pi}{4m}}\right).$$

Man lasse nun m unendlich groß werden, so wird man leicht sehen, daß wenn man die vorkommenden Sinus durch ihre Reihen nach Formel (21) des siebenten Abschn. §. 1 ausdrückt, dann $\frac{\sin\frac{\alpha}{2m}}{\sin\frac{p\pi}{4m}} = \frac{2\alpha}{p\pi}$, also $\frac{\sin^2\frac{\alpha}{2m}}{\sin^2\frac{p\pi}{4m}} = \frac{4\alpha^2}{p^2\pi^2}$ ist. Folglich hat man, was auch α sei:

$$\cos\alpha = \left(1 - \frac{4\alpha^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{4\alpha^2}{9\pi^2}\right)\left(1 - \frac{4\alpha^2}{25\pi^2}\right) \cdot \cdot \cdot \quad (17)$$

Setzt man in der Formel (16) für $\sin n\alpha$, $\sin\alpha\cos\alpha$ als gemeinschaftlichen Faktor aus, und nimmt wieder obige Substituirung vor, so findet sich:

$$\frac{\sin 2m\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha} = a_0 + a_2\sin^2\alpha + \cdot \cdot \cdot + \alpha_{2m-2}\sin^{2m-2}\alpha,$$

$$\frac{\sin 2m\alpha}{2m\sin\alpha\cos\alpha} = b_0 + b_1\sin^2\alpha + \cdot \cdot \cdot + b_{2m-2}\sin^{2m-2}\alpha$$

$$= k\left(\sin^2\alpha - \sin^2\frac{\pi}{2m}\right)\left(\sin^2\alpha - \sin^2\frac{2\pi}{2m}\right) \cdot \cdot \cdot \cdot$$

$$\left(\sin^2\alpha - \sin^2\frac{(m-1)\pi}{2m}\right).$$

Da für $\alpha = 0$, $\frac{\sin 2m\alpha}{2m\sin\alpha} = 1$, so findet man k und dann

$$\frac{\sin 2m\alpha}{2m\sin\alpha\cos\alpha} = \left(1 - \frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\frac{\pi}{2m}}\right)\left(1 - \frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\frac{2\pi}{2m}}\right) \cdot \cdot \cdot$$

$$\left(1 - \frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\frac{(m-1)\pi}{2m}}\right).$$

Setzt man wieder $\frac{\alpha}{2m}$ statt α, läßt dann m unendlich groß werden und bemerkt, daß dann $2m \sin \frac{\alpha}{2m} = 2m\left(\frac{\alpha}{2m} - \frac{\alpha^3}{(2m)^3}\frac{1}{1.2.3} + ..\right)$ zu α wird für $m=\infty$, $\cos \frac{\alpha}{2m}$ zu 1, so erhält man:

$$\sin\alpha = \alpha\left(1-\frac{\alpha^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{\alpha^2}{4\pi^2}\right)\left(1-\frac{\alpha^2}{9\pi^2}\right)\ldots (18)$$

X. Setzt man in (18) $\alpha = \frac{m\pi}{2n}$, so erhält man:

$$\sin\frac{m\pi}{2n} = \frac{m\pi}{2n}\left(1-\frac{m^2}{4n^2}\right)\left(1-\frac{m^2}{4.4n^2}\right)\left(1-\frac{m^2}{9.4n^2}\right)\ldots$$

$$= \frac{m\pi}{2n}\left(1+\frac{m}{2n}\right)\left(1-\frac{m}{2n}\right)\left(1+\frac{m}{4n}\right)\left(1-\frac{m}{4n}\right)\left(1+\frac{m}{6n}\right)\left(1-\frac{m}{6n}\right)\ldots$$

$$= \frac{m\pi}{2n}\left(\frac{2n+m}{2n}\right)\left(\frac{2n-m}{2n}\right)\left(\frac{4n+m}{4n}\right)\left(\frac{4n-m}{4n}\right)\left(\frac{6n+m}{6n}\right)\left(\frac{6n-m}{6n}\right)\ldots$$

$$\pi = \frac{2n}{m}.\ \sin\frac{m\pi}{2n}.\ \frac{2n}{2n-m}.\ \frac{2n}{2n+m}.\ \frac{4n}{4n-m}.\ \frac{4n}{4n+m}\ldots \quad (19)$$

Für n=m:

$$\pi = 2.\ \frac{2}{1}.\ \frac{2}{3}.\ \frac{4}{3}.\ \frac{4}{5}.\ \frac{6}{5}.\ \frac{6}{7}\ldots = 2.\ \frac{2^2.\ 4^2.\ 6^2.\ 8^2\ldots}{1.\ 3^2.\ 5^2.\ 7^2.\ 9.}$$

$$\frac{2}{\pi} = \frac{1}{2}.\ \frac{3}{2}.\ \frac{3}{4}.\ \frac{5}{4}.\ \frac{5}{6}.\ \frac{7}{6}.\ \frac{7}{8}.\ \frac{9}{8}\ldots$$

Für m=1, n=3:

$$\pi = 3.\ \frac{6^2.\ 12^2.\ 18^2.\ 24^2\ldots}{5.\ 7.\ 11.\ 13.\ 17.\ 19.\ 23.\ 25\ldots}$$

u. s. w.

Setzt man in der Formel (1) des fünften Abschnitts:

$a_0=1$, $a_1=3$, $a_2=3$, $a_3=5$, $a_4=5$, $a_5=7$, $a_6=7$, ...

$b_0=2$, $b_1=2$, $b_2=4$, $b_3=4$, $b_4=6$, $b_5=6$, $b_6=8$, ...

so wird:

$$\frac{1}{2}.\ \frac{3}{2}.\ \frac{3}{4}.\ \frac{5}{4}.\ \frac{5}{6}\ldots = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1.1}{2.2} - \frac{1}{4}.\ \frac{1.3}{2.2} + \frac{1}{4}.\ \frac{1.3.3}{2.2.4}$$

$$-\frac{1}{6}\cdot\frac{1.3.3.5}{2.2.4.4}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1.3.3.5.5}{2.2.4.4.6}-\ldots$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{6}\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2+\frac{1}{8}\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2+\ldots=\frac{2}{\pi}.$$

Setzt man dagegen:

$a_0=6,\ a_1=6,\ a_2=12,\ a_3=12,\ a_4=18,\ a_5=18,\ a_6=24,\ a_7=24,\ldots$

$b_0=5,\ b_1=7,\ b_2=11,\ b_3=13,\ b_4=17,\ b_5=19,\ b_6=23,\ b_7=25,\ldots$

so ist

$$\frac{\pi}{3}=1+\frac{1}{5}+\frac{-1}{7}\cdot\frac{6}{5}+\frac{1}{11}\cdot\frac{6.6}{5.7}+\frac{-1}{13}\cdot\frac{6.6.12}{5.7.11}+\frac{1}{17}\cdot\frac{6.6.12.12}{5.7.11.13}$$
$$+\frac{-1}{19}\cdot\frac{6.6.12.12.18}{5.7.11.13.17}+\ldots=1+\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{5}+\frac{1}{13}\cdot\frac{6.6}{5.7.11}+$$
$$\frac{1}{19}\cdot\frac{6.6.12.12}{5.7.11.13.17}+\frac{1}{25}\cdot\frac{6.6.12.12.18.18}{5.7.11.13.17.19.23}+\ldots$$

Elfter Abschnitt.

Die Zerfällung in Partialbrüche.

I. Sind a, b, c ... die Wurzeln der (algebraischen) Gleichung $F(x)=0$, und ist die erste m, die zweite n, die dritte r mal, ... Wurzel, ist ferner der Koeffizient des höchsten Gliedes gleich 1, so ist (wie man nach Anleitung des vierten Abschnitts finden wird): *)

$$F(x)=(x-a)^m(x-b)^n(x-c)^r\ldots \quad (1)$$

II. Sei nun $f(x)$ eine ganze Funktion von x, deren höchster Exponent niederer sei als der von $F(x)$, und man setze:

*) Es mag hier zu weiterer Deutlichkeit auf die zweite Abtheilung verwiesen werden.

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{A_1}{(x-a)^m} + \frac{A_2}{(x-a)^{m-1}} + \ldots + \frac{A_m}{x-a}$$
$$+ \frac{B_1}{(x-b)^n} + \frac{B_2}{(x-b)^{n-1}} + \ldots + \frac{B_n}{x-b}$$
$$+ \frac{C_1}{(x-c)^r} + \frac{C_2}{(x-c)^{r-1}} + \ldots + \frac{C_r}{x-c} \quad (2)$$
$$+ \ldots$$
$$\vdots$$

wo es nun darauf ankommen wird, die Koeffizienten $A_1, \ldots\ldots A_m$, $B_1, \ldots B_n$, $C_1, \ldots C_r, \ldots$ so zu bestimmen, daß die Gleichung (2) richtig ist, was auch x sei, d. h. daß sie identisch ist.

Man setze Alles, außer der ersten Linie $= \frac{K}{\varphi(x)}$, wo also $\varphi(x) = \frac{F(x)}{(x-a)^m}$, so ist, wenn man beiderseits mit F(x) multiplizirt und (1) beachtet:

$$f(x) = A_1\varphi(x) + A_2(x-a)\varphi(x) + A_3(x-a)^2\varphi(x) + \ldots$$
$$+ A_m(x-a)^{m-1}\varphi(x) + K(x-a)^m. \quad (3)$$

Daraus folgt, daß wenn man x=a setzt, in welchem Falle $\varphi(x)$ nicht Null wird, da $\varphi(x)$ keinen Faktor x—a mehr enthält, man hat:

$$f(a) = A_1\varphi(a),\ A_1 = \frac{f(a)}{\varphi(a)}. \quad (4)$$

Man setzt dabei voraus, daß f(x) und F(x) keinen gemeinschaftlichen Faktor haben, so daß also f(a) nicht etwa Null ist. Hätten f(x) und F(x) einen gemeinschaftlichen Faktor, so ließe er sich ja durch Division in dem Quotienten $\frac{f(x)}{F(x)}$ leicht wegschaffen. *)

Durch (4) ist nun A_1 unzweideutig bestimmt. Alsdann folgt aus (3):

$$f(x) - A_1\varphi(x) = \left[A_2\varphi(x) + A_3(x-a)\varphi(x) + \ldots + A_m(x-a)^{m-2}\varphi(x)\right]$$
$$(x-a) + K(x-a)^m. \quad (5)$$

Da die erste Seite Null wird für x=a (nach (4)) so ist sie durch x—a theilbar (vierter Abschnitt).

Aus (5) folgt aber:

$$\frac{f(x) - A_1\varphi(x)}{x-a} = A_2\varphi(x) + A_3(x-a)\varphi(x) + \ldots$$
$$+ A_m(x-a)^{m-2}\varphi(x) + K(x-a)^{m-1}.$$

*) Uebrigens dürfte auch f(a) Null sein. Dann wäre eben $A_1 = 0$.

Setzt man hier wieder beiderseits $x=a$, so wird die zweite Seite zu $A_2\varphi(a)$ und man kann also A_2 bestimmen.

Jetzt findet sich

$$\frac{f(x)-A_1\varphi(x)-A_2(x-a)\varphi(x)}{(x-a)^2}=A_3\varphi(x)+A_4(x-a)\varphi(x)+\ldots$$
$$+A_m(x-a)^{m-3}\varphi(x)+K(x-a)^{m-2}.$$

Setzt man wieder $x=a$, so erhält man A_3. Man sieht leicht, wie man in dieser Weise fortgehen kann und nach einander $A_4, \ldots A_m$ bestimmt.

Die Bestimmung von $B_1 \ldots B_n$ geschieht durchaus in derselben Weise. Man setzt Alles außer der zweiten Zeile $= \frac{L}{\psi(x)}$, wo $\psi(x) = \frac{F(x)}{(x-b)^n}$, so erhält man eben so, wie oben, $B_1, \ldots B_n$. In ähnlicher Weise verfährt man, um $C_1, \ldots C_r$ zu bestimmen, u. s. w.

Es ist möglich, daß $m, n, r, \ldots$ der Einheit gleich sind. Alsdann ist bloß:

$$\frac{f(x)}{F(x)}=\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b}+\frac{C}{x-c}+\ldots \quad (6)$$

also $f(x)=A(x-b)(x-c)\ldots+B(x-a)(x-c)\ldots+$
$C(x-a)(x-b)\ldots+\ldots$

Setzt man hier $x=a$, so findet sich A; für $x=b$ findet man B u. s. w., so daß

$$A=\frac{f(a)}{(a-b)(a-c)\ldots}, \quad B=\frac{f(b)}{(b-a)(b-c)\ldots},$$
$$C=\frac{f(c)}{(c-a)(c-b)\ldots}, \ldots \quad (7)$$

III. Daß aber durch diese Bestimmungsweise die zweite Seite der Gleichung (2) der ersten identisch wird, erhellt so:

Multiplizirt man beiderseits mit $F(x)$, so erhält man auf der ersten Seite $f(x)$, auf der zweiten eine ganze Funktion von x, welche $\psi(x)$ heißen mag und höchstens vom Grade $s-1$ ist, wenn $F(x)$ vom Grade s ist. Aber auch $f(x)$ ist höchstens vom Grade $s-1$, da es von niedrigerm Grade sein soll, als $F(x)$.

Nun werden $A_1, \ldots, B_1, \ldots, \ldots$ so bestimmt, daß $f(x)-\psi(x)$ Null wird für s Werthe von x, nämlich für die m Werthe a, die n Werthe b u. s. f. Man überzeugt sich leicht davon, indem $\psi(x)$ z. B. nichts Anderes ist, als die zweite Seite der Gleichung (3) und die Bestimmungsweise von $A_1, \ldots$ darauf hinausläuft, zu veranstalten, daß

$\frac{f(x)-A_1\varphi(x)-\ldots-A_m(x-a)^{m-1}\varphi(x)}{(x-a)^{m-1}}$ Null wird für $x=a$,

oder daß $f(x)-\psi(x)$ sich durch $(x-a)^m$ theilen läßt. Deßgleichen werden $B_1, \ldots$ so bestimmt, daß $f(x)-\psi(x)$ sich durch $(x-b)^n$ theilen läßt u. s. f., so daß $f(x)-\psi(x)$ den Faktor $(x-a)^m (x-b)^n, \ldots$ d. h. $F(x)$ enthält, was aber nicht möglich ist, da $F(x)$ von höherm Grade ist, als $f(x)-\psi(x)$, außer wenn $f(x)-\psi(x)$ für jeden Werth von x verschwindet.

IV. Alles Obige gilt selbst verstanden auch, wenn einige der Werthe $a, b, \ldots$ imaginär wären. Aber zwei imaginäre Werthe haben, wie aus der Lehre von den höhern Gleichungen erhellt*), immer die Form $\alpha \pm \beta i$, so daß man zwei Brüche von folgender Gestalt erhält:

$$\frac{A_1}{(x-\alpha-\beta i)^m}+\frac{B_1}{(x-\alpha+\beta i)^m}=\frac{A_1(x-\alpha+\beta i)^m+B_1(x-\alpha-\beta i)^m}{\left((x-\alpha)^2+\beta^2\right)^m},$$

worin der Zähler der Summe gleichfalls reell sein wird, da A_1 und B_1 in derselben Weise bestimmt werden, nur daß in B_1 i negativ ist, wenn es in A_1 positiv ist, so daß wenn $A_1=C+Di$, $B_1=C-Di$. Setzt man $(x-\alpha+\beta i)=r(\cos e+i\sin e)$, so ist $x-\alpha-\beta i=r(\cos e-i\sin e)$, $(x-\alpha+\beta i)^m=r^m(\cos me+i\sin me)$, $(x-\alpha-\beta i)^m=r^m(\cos me-i\sin me)$, woraus denn obige Behauptung leicht folgt, da allgemein

$$(A+Bi)(C+Di)+(A-Bi)(C-Di)=2(AC-BD).$$

V. Sei z. B.

$$\frac{x^2+5x-9}{x^3-6x^2+11x-6}$$

zu zerfällen.

Es ist $x^3-6x^2+11x-6=F(x)=(x-1)(x-2)(x-3)$, also

$$\frac{x^2+5x-9}{x^3-6x^2+11x-6}=\frac{x^2+5x-9}{(x-1)(x-2)(x-3)}=$$

$$\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x-3},$$

$$x^2+5x-9=A(x-2)(x-3)+B(x-1)(x-3)+C(x-1)(x-2).$$

Für $x=1$:

$$-3=A.(-1)(-2),\ A=-\frac{3}{2}.$$

*) Zweite Abth., vierter Abschn. §. 5.

für $x=2$: $5=B1.(-1)$, $B=-5$,

für $x=3$: $15=C.2.1$, $C=\frac{15}{2}$,

also

$$\frac{x^2+5x-9}{x^3+6x^2+11x-6}=\frac{-\frac{3}{2}}{x-1}-\frac{5}{x-2}+\frac{\frac{15}{2}}{x-3}=$$

$$\frac{-3}{2x-2}-\frac{5}{x-2}+\frac{15}{2x-6}.$$

Zwölfter Abschnitt.

Die rekurrenten Reihen.

I. Hat man den Bruch

$$\frac{ax^n+bx^{n-1}+\ldots+k}{x^m+Ax^{m-1}+\ldots+K},\ m>n, \qquad (1)$$

und dividirt mit dem Nenner in den Zähler, so kann man, je nachdem man anfängt, als Quotienten eine Reihe erhalten, die nach steigenden oder fallenden Potenzen von x fortgeht.

So erhält man durch Division aus $\frac{x^2+5x-4}{x^3-6x^2+7x+8}$:

$$x^2+5x-4 \;\Big|\; x^3-6x^2+7x+8$$

$$x^2-6x+7+\frac{8}{x} \;\Big|\; \frac{1}{x}+\frac{11}{x^2}+\frac{55}{x^3}\ldots \text{ nach fallenden Potenzen von } x.$$

$$11x-11-\frac{8}{x}$$

$$11x-66+\frac{77}{x}+\frac{88}{x^2}$$

$$55-\frac{85}{x}-\frac{88}{x^2}$$

$$
\begin{array}{l|l}
-4+5x+x^2 & 8+7x-6x^2+x^3 \\
\hline
-4-\frac{7}{2}x+3x^2-\frac{1}{2}x^3 & -\frac{1}{2}+\frac{17}{16}x-\frac{151}{128}x^2 \ldots
\end{array}
$$

nach steigenden Potenzen von x.

$$
\begin{array}{l}
\frac{17}{2}x-2x^2+\frac{1}{2}x^3 \\
\frac{17}{2}x+\frac{119}{16}x^2-\frac{51}{8}x^3+\frac{17}{16}x^4 \\
\hline
-\frac{151}{16}x^2+\frac{55}{8}x^3-\frac{17}{16}x^4 \\
-\frac{151}{16}x^2-\frac{1057}{128}x^3+\frac{906}{128}x^4-\frac{151}{128}x^5 \\
\hline
-\frac{1937}{128}x^3-\frac{1042}{128}x^4+\frac{151}{128}x^5
\end{array}
$$

Zerfällt man nun nach der im vorigen Abschnitt gelehrten Weise den Bruch (1) in seine Einzelbrüche, so ist offenbar, daß die entstehende Reihe genau die Summe aller der Reihen sein wird, die aus den Einzelbrüchen hervorgehen, wenn man dieselben gleichfalls nach steigenden oder fallenden Potenzen von x entwickelt.

Wir denken uns dabei zunächst jede Reihe endlich, indem wir den Rest als Ergänzungsglied beisetzen.

So wäre
$$\frac{x^2+5x-4}{x^3-6x^2+7x+8}=-\frac{1}{2}+\frac{17}{16}x-\frac{151}{128}x^2+\frac{-\frac{1937}{128}x^3-\frac{1042}{128}x^4+\frac{151}{128}x^5}{x^3-6x^2+7x+8}, \text{ u. s. w.}$$

II. Sei nun, wenn nach steigenden Potenzen von x entwickelt wird:

$$\frac{f(x)}{F(x)}=A_0+A_1x+A_2x^2+\ldots+A_nx^n+\frac{R_n}{F(x)}, \qquad (2)$$

so heißen wir A_nx^n das allgemeine Glied dieser Reihe, aus dem man alle einzelnen erhält, wenn man $n=0,1,2,\ldots$ setzt. $\frac{R_n}{F(x)}$ heiße das Ergänzungsglied und $\frac{f(x)}{F(x)}$ sei der erzeugende Bruch der Reihe, deren allgemeines Glied A_nx^n ist. Man sieht leicht ein, daß also auch $\frac{R_n}{F(x)}$ der erzeugende Bruch einer Reihe ist, deren allgemeines Glied $A_{n+r+1}\,x^{n+r+1}$ ist, $r=0,1,\ldots$. Verschwindet das

Ergänzungsglied für $n=\infty$, so ist die entstehende unendliche Reihe konvergent, also der erzeugende Bruch geradezu die Summe der unendlichen Reihe.

Wir haben hiebei $f(x)$ von niedererm Grade vorausgesetzt, als $F(x)$. Wäre das Umgekehrte der Fall, so würden vor A_0 noch Quotienten der Form $\frac{B}{x^m}$ vorkommen. Wir wollen aber Dies hier nicht betrachten, da es für unsere Zwecke vollkommen hinreicht, $f(x)$ von niedererm Grade anzunehmen als $F(x)$.

Aus den obigen Bemerkungen folgt nun, daß wenn K der erzeugende Bruch einer Reihe ist, deren allgemeines Glied $A_n x^n$; K^1 der erzeugende Bruch einer Reihe, deren allgemeines Glied $A_{n+r+1}\, x^{n+r+1}$ $(r=0,1,\ldots)$, man haben wird:

$$K-K^1=A_0+A_1x+A_2x^2+\ldots+A_nx^n, \quad (3)$$

wodurch nun die Summe dieser $n+1$ Glieder gefunden ist.

III. Zunächst wollen wir die Reihe untersuchen, die aus $\frac{1}{(a-x)^m}$ entsteht, wenn man nach steigenden Potenzen von x entwickelt. Es ist vor Allem klar, daß das Ergebniß der Division durchaus dasselbe sein wird, ob die etwa ins Unendliche fortlaufend gedachte Reihe konvergent ist, oder nicht. Ist sie aber konvergent, so folgt aus (14) des achten Abschnitts, wenn man dort $-m$ statt m, $-\frac{x}{a}$ statt a setzt:

$$\frac{1}{\left(1-\frac{x}{a}\right)^m}=1+\frac{m}{1}\cdot\frac{x}{a}+\frac{m(m+1)}{1.2}\left(\frac{x}{a}\right)^2+\ldots$$
$$+\frac{m(m+1)\ldots(m+n-1)}{1.2\ldots\ldots n}\,\frac{x^n}{a^n}+\ldots$$

also

$$\frac{1}{(a-x)^m}=\frac{1}{a^m}+\frac{m}{1}\cdot\frac{x}{a^{m+1}}+\frac{m(m+1)}{1.2}\,\frac{x^2}{a^{m+2}}+\ldots$$
$$+\frac{m(m+1)\ldots(m+n-1)}{1.2\ldots\ldots n}\,\frac{x^n}{a^{m+n}}+\ldots$$

Da die Division offenbar dasselbe geben muß, und das Ergebniß der Division gleich ist, ob die entsprechende Reihe konvergirt oder nicht, so kann man also allgemein aussprechen, daß das allgemeine Glied der aus $\frac{1}{(a-x)^m}$ hervorgehenden Reihe ist:

$$\frac{m(m+1)\ldots(m+n-1)}{1.2\ldots\ldots n}\,\frac{x^n}{a^{m+n}},\ n=0,1,\ldots, \quad (4)$$

wo für $n=0$ das erste Glied $\frac{1}{a^m}$ ist.

Daraus folgt, daß aus $\frac{A}{(a-bx)^m}$ eine Reihe entsteht, deren allgemeines Glied

$$A.\frac{m(m+1)\ldots(m+n-1)}{1.2\ldots\ldots n}\frac{b^n}{a^{m+n}}x^n,\ n=0,1,\ldots \quad (5)$$

ist.

IV. Das allgemeine Glied der aus der Summe der Brüche:

$$\frac{R(\cos T+i\sin T)}{(r(\cos t+i\sin t)-bx)^m}+\frac{R(\cos T-i\sin T)}{(r(\cos t-i\sin t)-bx)^m}$$

entstehenden Reihe ist sonach:

$$\frac{m(m+1)\ldots(m+n-1)}{1.2\ldots\ldots n}\frac{b^n}{r^{m+n}}.x^n.$$

$$\left[\frac{R\cos T+i\sin T}{\cos(m+n)t+i\sin(m+n)t}+\frac{R(\cos T-i\sin T)}{\cos(m+n)t-i\sin(m+n)t}\right]$$

$$=\frac{m(m+1)\ldots(m+n-1)}{1.2\ldots\ldots n}\frac{2b^nRx^n}{r^{m+n}}\cos\left((m+n)t-T\right). \quad (6)$$

V. Man habe den Bruch $\frac{a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_{m-1}x^{m-1}}{b_0+b_1x+b_2x^2+\ldots+b_mx^m}$, worin aber b_0 nicht Null sei.

Sei ferner

$$A_0+A_1x+\ldots+A_nx^n+R$$

die durch Division daraus entstandene Reihe, so muß also:

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_{m-1}x^{m-1}=(A_0+A_1x+\ldots+R)$$
$$(b_0+b_1x+\ldots+b_mx^m)$$

sein. Multiplizirt man nun wirklich, so folgt daraus, daß:

$$\begin{aligned}
&A_0b_0=a_0,\\
&A_0b_1+A_1b_0=a_1,\\
&A_0b_2+A_1b_1+A_2b_0=a_2,\\
&A_0b_3+A_1b_2+A_2b_1+A_3b_0=a_3,\\
&\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (7)\\
&A_0b_{m-1}+A_1b_{m-2}+\ldots+A_{m-1}b_0=a_{m-1},\\
&A_0b_m+A_1b_{m-1}+\ldots\ldots+A_mb_0=0,\\
&\vdots\\
&A_nb_m+A_{n+1}b_{m-1}+\ldots+A_{m+n}b_0=0,\ n\geqq 0.
\end{aligned}$$

Man überzeugt sich einerseits leicht von der Richtigkeit dieser Gleichungen, wenn man darauf achtet, daß die Reihe $A_0+A_1x+\ldots$ durch Division entstanden ist, also geradezu die Gleichungen (7) voraussetzt, z. B.:

$$\begin{array}{l|l}
\multicolumn{1}{l}{b_0+b_1x+\ldots+b_mx^m} & \\
\hline
a_0+a_1x+\ldots\ldots+a_{m-1}x^{m-1} & A_0+A_1x+A_2x^2+\ldots \\
A_0b_0+A_0b_1x+\ldots+A_0b_mx^m & \\
\hline
(a_1-A_0b_1)x+(a_2-A_0b_2)x^2+\ldots & \\
\quad A_1b_0x+A_1b_1x^2+\ldots & \\
\hline
\quad (a_2-A_0b_2-A_1b_1)x^2+\ldots & \\
\quad\quad A_2b_0x^2+\ldots & \\
\hline
\quad\quad\quad\ldots\ldots &
\end{array}$$

wenn man dabei die Gleichungen $a_0-A_0b_0=0$, $a_1-A_0b_1-A_1b_0=0$, $a_2-A_0b_2-A_1b_1-A_2b_0=0,\ldots$ bestehen läßt, so daß obige Gleichungen (7) ohne Weiteres zum Vorschein kommen. Anderseits kann man sich davon auch dadurch überzeugen, daß nach XIII. des sechsten Abschnitts die Beziehungen (7) wahr sind, wenn die entstehende Reihe konvergent ist. Da aber das Ergebniß der Division durchaus dasselbe ist, ob die entstehende Reihe konvergirt oder nicht, so sind also die Gleichungen (7) allgemein richtig.

Vermittelst dieser Gleichungen (7) kann man die Größen A_0, $A_1,\ldots$ eine nach der andern, d. h. rücklaufend bestimmen, und die Reihe

$$A_0+A_1x+A_2x^2+\ldots,$$

in der die Koeffizienten rücklaufend bestimmt werden, pflegt eine rücklaufende (rekurrente) Reihe genannt zu werden.

Aus den Gleichungen (7) folgt:

$$A_0=\frac{a_0}{b_0},$$

$$A_1=-\frac{b_1}{b_0}A_0+\frac{a_1}{b_0},$$

$$A_2=-\frac{b_2}{b_0}A_0-\frac{b_1}{b_0}A_1+\frac{a_2}{b_0},$$

$$\vdots$$

$$A_{m-1}=-\frac{b_{m-1}}{b_0}A_0-\frac{b_{m-2}}{b_0}A_1-\ldots-\frac{b_1}{b_0}A_{m-2}+\frac{a_{m-1}}{b_0},$$

$$A_m = -\frac{b_m}{b_0}A_0 - \frac{b_{m-1}}{b_0}A_1 - \dots - \frac{b_1}{b_0}A_{m-1},$$

$$\vdots \qquad (8)$$

$$A_{m+n} = -\frac{b_m}{b_0}A_n - \frac{b_{m-1}}{b_0}A_{n+1} - \dots - \frac{b_1}{b_0}A_{m+n-1},\ n \geqq 0.$$

Man wird das in diesen Gleichungen ausgesprochene Bildungsgesetz leicht in Worte fassen können, ohne daß es nöthig wäre, dasselbe hier auszusprechen.

Die Bestimmungsweise ist mithin eine rücklaufende. Die Reihe der Brüche:

$$\frac{-b_1}{b_0}, \frac{-b_2}{b_0}, \dots\dots, \frac{-b_m}{b_0}, \qquad (9)$$

heißt man die Vergleichungsreihe, und man sieht leicht, daß wenn die Vergleichungsreihe ist:

$$c_1,\ c_2,\ \dots,\ c_m$$

man haben wird:

$$A_1 = c_1 A_0 + \frac{a_1}{b_0},$$

$$A_2 = c_2 A_0 + c_1 A_1 + \frac{a_2}{b_0},$$

$$A_3 = c_3 A_0 + c_2 A_1 + c_1 A_2 + \frac{a_4}{b_0} \qquad (9)$$

u. s. f.

Zugleich erhellt, daß in diesem Falle der Nenner des erzeugenden Bruches

$$1 - c_1 x - c_2 x^2 - \dots - c_m x^m \qquad (10)$$

ist, wenn man den Faktor b_0, der noch immer beigefügt werden kann, vernachlässigt.

Die Reihen (8) geben alsdann den Zähler und es ist

$$a_0 = A_0$$
$$a_1 = A_1 - c_1 A_0$$
$$a_2 = A_2 - c_1 A_1 - c_2 A_0 \qquad (11)$$
$$\vdots$$
$$a_{n-1} = A_{n-1} - c_1 A_{n-2} - \dots - c_{n-1} A_0,\ n \leqq m,$$

wenn $A_0 + A_1 x + \dots$ die gegebene rücklaufende Reihe ist. Wir haben dabei $b_0 = 1$ gesetzt, was, wie man leicht sieht, der Allgemein-

heit keinen Eintrag thut, da man nur statt $\frac{a_0}{b_0}, \frac{a_1}{b_0}, \ldots \frac{a_{m-1}}{b_0}$: a_0, $a_1, \ldots a_{m-1}$ zu denken hat.

Z. B. die Reihe

$$1+3x-5x^2+6x^3+10x^4 \ldots$$

habe die Vergleichungsreihe 1, —3, —5, 4,

so ist $c_1=1$, $c_2=-3$, $c_3=-5$, $c_4=4$, und $m=4$.

$$A_0=1,\ A_1=3,\ A_2=-5,\ A_3=6,\ A_4=10,$$

also
$$a_0=1$$
$$a_1=3-1.\,1=2$$
$$a_2=-5-1.3+3.1=-5,$$
$$a_3=6+1.5+3.3+5.1=25$$

also ist der erzeugende Bruch:

$$\frac{1+2x-5x^2+25x^3}{1-x+3x^2+5x^3-4x^4}$$

und wenn man nun die Reihe sucht, so ist in (8):

$$\left.\begin{array}{l} a_0=1,\ a_1=2,\ a_2=-5,\ a_3=25, \\ b_0=1,\ b_1=-1,\ b_2=3,\ b_3=5,\ b_4=-4 \end{array}\right| m=4$$

also

$$A_0=1,$$
$$A_1=1.1+2=3,$$
$$A_2=-3.1+1.3-5=-5,$$
$$A_3=-5.1-3.3-5.1+25=6,$$
$$A_4=4.1-5.3+3.5+1.6=10,$$
$$A_5=4.3+5.5-3.6+1.10=29,$$
$$A_6=-4.5-5.6-3.10+1.29=-51,$$
$$A_7=+4.6-5.10-3.29-1.51=-164$$

u. s. w., also die Reihe $1+3x-5x^2+6x^3+10x^4+29x^5-51x^6-164x^7 \ldots$

Kennt man einmal den erzeugenden Bruch, so findet man, wenn man ihn in seine Einzelbrüche zerlegt, das allgemeine Glied der Reihe. Aus der gegebenen Vergleichungsreihe, einigen ersten Gliedern der entstehenden Reihe (genau so vielen, als die Vergleichungsreihe Glieder hat) kann man nun den erzeugenden Bruch und daraus dann das allgemeine Glied der Reihe finden.

VI. Wir haben schon in II. gesehen, wie man, wenn der erzeugende Bruch bestimmt ist, daraus die Summe einer Anzahl Glieder der Reihe bestimmen kann. Wir wollen jenen Satz nun auf einige Beispiele anwenden.

1) Man soll die Summe der n+1 ersten Glieder der Reihe bestimmen, deren allgemeines Glied $(2.4^n+3)x^n$, $n=0,1,\ldots$ ist.

Das allgemeine Glied zerfällt in folgende zwei Theile: $2.4^n x^n$ und $3.x^n$. Der erzeugende Bruch für den ersten Theil ist nach (5): $\frac{2}{1-4x}$, für den zweiten: $\frac{3}{1-x}$, also ist in II.:

$$K=\frac{2}{1-4x}+\frac{3}{1-x}=\frac{5-14x}{1-5x+4x^2}.$$

Nun hat man auch den erzeugenden Bruch K^1 für die Reihe zu suchen, deren allgemeines Glied:

$$2.4^{n+r+1}x^{n+r+1}+3.x^{n+r+1}=2x^{n+1}.4^{n+1}.4^r x^r+3.x^{n+1}.x^r,$$
$$r=0,1,\ldots$$

Ganz eben so findet sich

$$K^1=\frac{2.(4x)^{n+1}}{1-4x}+\frac{3x^{n+1}}{1-x}=$$
$$\frac{(2.4^{n+1}+3)x^{n+1}-(2.4^{n+1}+12)x^{n+2}}{1-5x+4x^2}.$$

Demnach ist, wenn durch $\overset{n}{\underset{0}{S}}(2.4^n+3)x^n$ die Summe der n+1 ersten Glieder der vorgelegten Reihe bezeichnet wird:

$$\overset{n}{\underset{0}{S}}(2.4^n+3)x^n=$$
$$\frac{5-14x-(2.4^{n+1}+3)x^{n+1}+(2.4^{n+1}+12)x^{n+2}}{(1-x)(1-4x)}.$$

Zähler und Nenner dieses Bruches lassen sich übrigens noch durch $1-x$ und $1-4x$ dividiren.

Sei z. B. $x=2$, $n=4$, so hat man:

$$\overset{4}{\underset{0}{S}}(2.4^n+3).2^n=5+22+140+1048+8240=$$
$$\frac{5-28-(2.1024+3)32+(2.1024+12)64}{(-1)(-7)}=9455,$$

wie man sich leicht überzeugt, richtig.

2) Sei $\overset{n}{\underset{0}{S}}\frac{(n+1)(n+2)}{1.2}x^n$ zu suchen.

Hier ist in (5): $a=1$, $A=1$, $b=1$, $m=3$, $K=\frac{1}{(1-x)^3}$. Das allgemeine Glied für K^1 ist:

$$\frac{(n+r+2)(n+r+3)}{1.\,2}x^{n+r+1}=\frac{r^2+(2n+5)r+(n+2)(n+3)}{1.\,2}x^{n+r+1}$$

$$=\frac{(r+1)(r+2)+(2n+5-3)(r+1)+n^2+3n+4}{1.\,2}x^{n+r+1}$$

$$=\frac{(r+1)(r+2)}{1.\,2}x^{n+r+1}+\frac{2n+2}{1.\,2}(r+1)x^{n+r+1}+$$

$$\frac{n^2+3n+4}{1.\,2}x^{n+r+1},\ r=0,1,\ldots$$

Also der erzeugende Bruch:

$$K^1=\frac{x^{n+1}}{(1-x)^3}+(n+1)\frac{x^{n+1}}{(1-x)^2}+\frac{n^2+3n+4}{2}\,\frac{x^{n+1}}{1-x}\text{ also}$$

$$\overset{n}{\underset{0}{S}}\frac{(n+1)(n+2)}{1.\,2}x^n=$$

$$\frac{1-x^{n+1}\left(4+\frac{5n+n^2}{2}\right)+x^{n+2}(n^2+4n+5)-x^{n+3}\left(\frac{n^2+3n+4}{2}\right)}{(1-x)^3}$$

worin übrigens der Zähler sich durch $(1-x)^3$ theilen läßt.

3) Sei $\overset{n}{\underset{0}{S}}x^n\cos nt$ zu suchen.

In (6) ist $R=\frac{1}{2}$, $b=1$, $r=1$, $T=t$, $m=1$, also der erzeugende Bruch:

$$\frac{\frac{1}{2}(\cos t+i\sin t)}{\cos t+i\sin t-x}+\frac{\frac{1}{2}(\cos t-i\sin t)}{\cos t-i\sin t-x}=\frac{1-x\cos t}{1-2x\cos t+x^2}=K.$$

Für $x^{n+r+1}\cos(n+r+1)t$ ist $R=\frac{1}{2}$, $b=r=1$, $T=-nt$, $m=1$, also

$$K^1=\frac{\cos(n+1)t-x\cos nt}{1-2x\cos t+x^2}x^{n+1},$$

also $$\overset{n}{\underset{0}{S}}x^n\cos nt=\frac{1-x\cos t-x^{n+1}\cos(n+1)t+x^{n+2}\cos nt}{1-2x\cos t+x^2}.$$

Für $x=1$:

$$1+\cos t+\cos 2t+\ldots+\cos nt=\frac{1-\cos t-\cos(n+1)t+\cos nt}{2(1-\cos t)}.$$

4) Sei $\overset{n}{\underset{0}{S}}\left[2(3n^2-1)2^n+12n\right]x^n$ zu suchen.

Es ist $2(3n^2-1).2^n+12n=3.2^{n+2}.\frac{(n+1)(n+2)}{1.2}-$

$2^{n+1}.9(n+1)+2^{n+2}+12(n+1)-12$,

folglich das allgemeine Glied:

$$\frac{12.(n+1)(n+2)}{1.2}(2x)^n-18.(n+1)(2x)^n+4(2x)^n+12.(n+1)x^n$$
$$-12x^n,$$

$$K=\frac{12}{(1-2x)^3}-\frac{18}{(1-2x)^2}+\frac{4}{1-2x}+\frac{12}{(1-x)^2}-\frac{12}{1-x}.$$

Für K^1 ist das allgemeine Glied:

$$\left(6(n+r+1)^2-2\right)(2x)^{n+r+1}+12(n+r+1)x^{n+r+1}=$$
$$\left[\frac{12(r+1)(r+2)}{1.2}+(12n-6)(n+1)+4+(n+1)^2-12(n+1)\right]$$
$$(2x)^r.(2x)^{n+1}+\left(12(r+1)-12\right)x^{n+1}x^r+12(n+1)x^{n+1}x^r,$$

folglich:

$$K^1=\frac{12.(2x)^{n+1}}{(1-2x)^3}+\frac{(12n-6)(2x)^{n+1}}{(1-2x)^2}+\frac{(n+1)^2-12n-8}{1-2x}(2x)^{n+1}$$
$$+\frac{12.x^{n+1}}{(1-x)^2}-\frac{12x^{n+1}}{1-x}+\frac{12(n+1)x^{n+1}}{1-x}.$$

Und endlich die Summe $=K-K^1$.

Man wird an dem letzten Beispiele gesehen haben, in welcher Weise man das gegebene allgemeine Glied umzugestalten hat, um es auf die Formen (5) oder (6) zu bringen. Weitere Beispiele zu geben halten wir für unsern jetzigen Zweck nicht für nöthig. Sie sind ohnehin nicht schwer zu bilden.

Dreizehnter Abschnitt.

Die Differenzenreihen.

§. 1.

I. Sei f(x) eine Funktion von x, die wir als stetig voraussetzen

(dritter Abschnitt I), und es nehme x und Δx zu, so entsteht $f(x+\Delta x)$ und die Zunahme

$$f(x+\Delta x)-f(x) \qquad (1)$$

der Funktion f(x) heißt die Differenz von f(x) für die Zunahme Δx von x. Δx ist natürlich durchaus willkührlich. Man bezeichnet diese Differenz durch $\Delta f(x)$ und setzt also

$$\Delta f(x)=f(x+\Delta x)-f(x). \qquad (2)$$
$$f(x+\Delta x)=f(x)+\Delta f(x).$$

II. Sei $f(x)=a^x$, so ist

$$\Delta a^x=a^{x+\Delta x}-a^x=a^x(a^{\Delta x}-1). \qquad (3)$$

Deßgleichen:

$$\Delta \sin x=\sin(x+\Delta x)-\sin x=2\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}. \qquad (4)$$

$$\Delta \cos x=\cos(x+\Delta x)-\cos x=-2\sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right).\sin\frac{\Delta x}{2}. \qquad (5)$$

$$\Delta x^a=(x+\Delta x)^a-x^a=x^a\left[\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^a-1\right], \qquad (6)$$

$$\Delta \log x=\log(x+\Delta x)-\log x=\log\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right). \qquad (7)$$

$$\Delta \operatorname{tg} x=\operatorname{tg}(x+\Delta x)-\operatorname{tg}(x)=\frac{\sin\Delta x}{\cos(x+\Delta x).\cos x}, \qquad (8)$$

u. s. f.

III. Wenn f(x) die Summe oder Differenz mehrerer Funktionen von x ist, z. B.

$$f(x)=\varphi(x)\pm\psi(x)\pm\lambda(x)\pm\ldots$$

so ist

$$\Delta f(x)=\varphi(x+\Delta x)\pm\psi(x+\Delta x)\pm\lambda(x+\Delta x)\pm\ldots-$$
$$\left(\varphi(x)\pm\psi(x)\pm\lambda(x)\pm\ldots\right)=\Delta\varphi(x)\pm\Delta\psi(x)\pm\Delta\lambda(x)\pm\ldots \qquad (9)$$

IV. Enthält k kein x, so ist offenbar

$$\Delta k=0, \qquad (10)$$

$$\Delta\left(kf(x)\right)=kf(x+\Delta x)-kf(x)=k\Delta f(x). \qquad (11)$$

V. Sind f(x), F(x) zwei Funktionen von x, so ist

$$\Delta\left(f(x).F(x)\right)=f(x+\Delta x).F(x+\Delta x)-f(x).F(x)=\left(f(x)+\Delta f(x)\right)$$
$$\left(F(x)+\Delta F(x)\right)-f(x).F(x)=f(x).\Delta F(x)+F(x)\Delta f(x)+$$
$$\Delta f(x).\Delta F(x). \qquad (12)$$

VI. Deßgleichen ist

$$\Delta\left(\frac{f(x)}{F(x)}\right)=\frac{f(x)+\Delta f(x)}{F(x)+\Delta F(x)}-\frac{f(x)}{F(x)}=$$

$$\frac{F(x).\,\Delta f(x)-f(x)\Delta F(x)}{\big(F(x)+\Delta F(x)\big)F(x)}. \quad (13)$$

Legt man in den Sätzen (9)—(13) den Funktionen f(x), . . . besondere Formen, wie in (3)—(8) unter, so wird man leicht Aufgaben bilden können, was wir hier aber übergehen. Nur ein Beispiel, als Anwendung der Formel (12) möge hier Platz finden. Sei dort $f(x)=x$, $F(x)=a^x$, so ist

$$\Delta(xa^x)=x(a^{\Delta x}-1)a^x+a^x\Delta x+\Delta x(a^{\Delta x}-1)a^x=$$
$$xa^x(a^{\Delta x}-1)+a^{x+\Delta x}\Delta x.$$

§. 2.

I. Da $\Delta f(x)$, wie aus dem Obigen deutlich hervorgeht, im Allgemeinen wieder eine Funktion von x ist, so kann man diese Funktion wieder behandeln, wie es in §. 1 geschehen ist, d. h. man kann ebenfalls ihre Differenz suchen. Bezeichnen wir dieselbe mit $\Delta^2 f(x)$, so ist also:

$$\Delta^2 f(x)=\Delta f(x+\Delta x)-\Delta f(x). \quad (1)$$

Aber auch $\Delta^2 f(x)$ ist wieder im Allgemeinen eine Funktion von x, so daß man auch von ihr wird die Differenz suchen können, die mit $\Delta^3 f(x)$ bezeichnet werden mag, wonach:

$$\Delta^3 f(x)=\Delta^2 f(x+\Delta x)-\Delta^2 f(x),$$

und wenn man so fortgeht, allgemein:

$$\Delta^n f(x)=\Delta^{n-1} f(x+\Delta x)-\Delta^{n-1} f(x). \quad (2)$$

II. Es ist nun nicht schwer $\Delta^n f(x)$ durch f(x) auszudrücken. Es ist nämlich:

$$\Delta f(x)=f(x+\Delta x)-f(x),$$
$$\Delta^2 f(x)=\Delta f(x+\Delta x)-\Delta f(x)=f(x+2\Delta x)-f(x+\Delta x)-$$
$$\big(f(x+\Delta x)-f(x)\big)$$
$$=f(x+2\Delta x)-2f(x+\Delta x)+f(x),$$
$$\Delta^3 f(x)=\Delta^2 f(x+\Delta x)-\Delta^2 f(x)$$
$$=f(x+3\Delta x)-2f(x+2\Delta x)+f(x+\Delta x)-$$
$$\big[f(x+2\Delta x)-2f(x+\Delta x)+f(x)\big]$$
$$=f(x+3\Delta x)-3f(x+2\Delta x)+3f(x+\Delta x)-f(x).$$
$$\vdots$$

allgemein schließt man daraus:

$$\Delta^n f(x) = f(x+n\Delta x) - \frac{n}{1} f(x+\overline{n-1}\Delta x) +$$

$$\frac{n(n-1)}{1.2} f(x+\overline{n-2}\Delta x) - \ldots + (-1)^n f(x). \quad (3)$$

Um diese Formel zu beweisen, verfahren wir ganz wie in I. des ersten Abschnitts. Wir nehmen nämlich an, sie gelte für n = r und fragen, ob sie auch noch für n=r+1 gilt. Es ist also

$$\Delta^{r+1} f(x) = f(x+\overline{r+1}\Delta x) - \frac{r}{1} f(x+r\Delta x) + \frac{r(r+1)}{1.2} f(x+\overline{r-1}\Delta x) - \ldots$$
$$+ (-1)^r f(x+\Delta x)$$
$$- f(x+r\Delta x) + \frac{r}{1} f(x+\overline{r-1}\Delta x) - \ldots$$
$$(-1)^{r+1} f(x)$$
$$= f(x+\overline{r+1}\Delta x) - \frac{r+1}{1} f(x+r\Delta x) + \frac{(r+1)\,(r+2)}{1.2}$$
$$f(x+\overline{r-1}\Delta x) - \ldots (-1)^{r+1} f(x),$$

was, wie man in I. des ersten Abschnitts gesehen, die allgemeine Geltung der Formel (3) erweist.

III. Umgekehrt ist nun auch:

$$f(x+\Delta x) = f(x) + \Delta f(x),$$
$$f(x+2\Delta x) = f(x+\Delta x) + \Delta f(x+\Delta x)$$
$$= f(x+\Delta x) + \Delta\Big(f(x) + \Delta f(x)\Big)$$
$$= f(x) + \Delta f(x) + \Delta f(x) + \Delta^2 f(x) \;\Big(\text{nach (9) in §. 1.}\Big)$$
$$= f(x) + 2\Delta f(x) + \Delta^2 f(x).$$
$$f(x+3\Delta x) = f(x+\Delta x) + 2\Delta f(x+\Delta x) + \Delta^2 f(x+\Delta x)$$
$$= f(x) + \Delta f(x) + 2\Delta f(x) + 2\Delta^2 f(x) + \Delta^2 f(x) + \Delta^3 f(x)$$
$$= f(x) + 3\Delta f(x) + 3\Delta^2 f(x) + \Delta^3 f(x)$$
$$\vdots$$

woraus allgemein:

$$f(x+n\Delta x) = f(x) + \frac{n}{1}\Delta f(x) + \frac{n(n-1)}{1.2}\Delta^2 f(x)$$
$$+ \ldots + \Delta^n f(x), \quad (4)$$

was wie (3) bewiesen wird.

Man stützt sich hiebei auch noch auf den Satz, daß

$$\Delta^n\Big(\varphi(x) \pm \psi(x) \pm \ldots\Big) = \Delta^n\varphi(x) \pm \Delta^n\psi(x) \pm \ldots, \quad (5)$$

der unmittelbar aus §. 1, Formel (9) sich ergibt.

§. 3.

Als Beispiele zum §. 2 mögen folgende dienen:

I. $f(x)=a^x$.

$$\Delta a^x=(a^{\Delta x}-1)a^x,$$

$$\Delta^2 a^x=(a^{\Delta x}-1)(a^{\Delta x}-1)a^x=(a^{\Delta x}-1)^2 a^x$$

$$\vdots$$

$$\Delta^n a^x=(a^{\Delta x}-1)^n a^x.$$

Setzt man dies in (3) des §. 2, so erhält man:

$$(a^{\Delta x}-1)^n a^x=a^x\left[a^{n\Delta x}-\frac{n}{1}a^{(n-1)\Delta x}+\frac{n(n-1)}{1.\,2}a^{(n-2)\Delta x}-\ldots\right],$$

was nichts Anderes als der binomische Satz ist. Ganz Aehnliches erhält man aus (4) in §. 2.

II. Sei $f(x)=\sin x$:

$$\Delta\sin x=2\sin\frac{\Delta x}{2}.\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)=$$

$$2\sin\frac{\Delta x}{2}\sin\left(x+\frac{\Delta x+\pi}{2}\right),$$

$$\Delta^2\sin x=\left(2\sin\frac{\Delta x}{2}\right)^2\sin\left(x+2.\frac{\Delta x+\pi}{2}\right),$$

$$\vdots$$

$$\Delta^n\sin x=\left(2\sin\frac{\Delta x}{2}\right)^n\sin\left(x+n\frac{\Delta x+\pi}{2}\right).$$

Setzt man dies in (3) und (4) des §. 1:

$$\left(2\sin\frac{\Delta x}{2}\right)^n\sin\left(x+n.\frac{\Delta x+\pi}{2}\right)=\sin(x+n\Delta x)-$$

$$\frac{n}{1}\sin(x+\overline{n-1}\Delta x)+\frac{n(n-1)}{1.\,2}\sin(x+\overline{n-2}\Delta x)-\ldots(-1)^n\sin x.$$

$$\sin(x+n\Delta x)=\sin x+\frac{n}{1}\left(2\sin\frac{\Delta x}{2}\right)\sin\left(x+\frac{\Delta x+\pi}{2}\right)$$

$$+\frac{n(n-1)}{1.\,2}\left(2\sin\frac{\Delta x}{2}\right)^2\sin\left(x+2\frac{\Delta x+\pi}{2}\right)$$

$$+\frac{n(n-1)(n-2)}{1.\,2.\,3}\left(2\sin\frac{\Delta x}{2}\right)^3\sin\left(x+3\frac{\Delta x+\pi}{2}\right),$$

$$+\ldots.$$

$$\vdots$$

$$+\left(2\sin\frac{\Delta x}{2}\right)^n\sin\left(x+n\frac{\Delta x+\pi}{2}\right).$$

III. Ganz eben so erhält man:

$$\Delta^n \cos x = \left(2\sin\frac{\Delta x}{2}\right)^n \cos\left(x + n\,\frac{\Delta x + \pi}{2}\right),$$

$$\cos(x+n\Delta x) - \frac{n}{1}\cos(x+\overline{n-1}\Delta x) + \frac{n(n-1)}{1.\,2}\cos(x+\overline{n-2}\Delta x) - \ldots$$

$$+(-1)^n\cos x = \left(2\sin\frac{\Delta x}{2}\right)^n \cos\left(x + n\,\frac{\Delta x+\pi}{2}\right),$$

$$\cos(x+n\Delta x) = \cos x + \frac{n}{1}\left(2\sin\frac{\Delta x}{2}\right)\cos\left(x + \frac{\Delta x+\pi}{2}\right)$$

$$+ \frac{n(n-1)}{1.\,2}\left(2\sin\frac{\Delta x}{2}\right)^2\cos\left(x + 2\frac{\Delta x+\pi}{2}\right)$$

$$+ \ldots$$

$$\vdots$$

$$+ \left(2\sin\frac{\Delta x}{2}\right)^n \sin\left(x + n\,\frac{\Delta x+\pi}{2}\right).$$

IV. Sei $f(x) = x^n$, so ist offenbar

$\Delta(x^n) = x^{n-1}\Delta x + \frac{n(n-1)}{1.\,2}x^{n-2}\Delta x^2 + \ldots + (\Delta x)^n$, wenn n ganz und positiv.

Daraus folgt, daß

$\Delta^2 x^n$ anfängt mit $n(n-1)x^{n-2}(\Delta x)^2$

und kein Glied weiter mehr enthält, das $(\Delta x)^2$, oder eine niederere Potenz von Δx enthielte. Die höchste Potenz von Δx ist aber wieder $(\Delta x)^n$. Deßgleichen ist das Glied von $\Delta^3 x^n$, welches die niederste Potenz von Δx und zugleich die höchste von x enthält: $n(n-1)(n-2)x^{n-3}(\Delta x)^3$, ..., das Glied, welches die niederste Potenz in $\Delta^n x^n$ enthält, ist $n(n-1)\ldots 1(\Delta x)^n$. Da dies zugleich immer die höchste ist, so ist also

$\Delta^n x^n = n(n-1)\ldots 1(\Delta x)^n$,

folglich $\Delta^{n+1}x^n = 0, \ldots, \Delta^{n+r}x^n = 0$, $r = 1, 2, 3, \ldots$

Daraus folgt, wenn man in (3) des §. 2 setzt:

$$(x+n\Delta x)^n - \frac{n}{1}(x+\overline{n-1}\,\Delta x)^n + \frac{n(n-1)}{1.\,2}(x+\overline{n-2}\Delta x)^n - \ldots$$

$$(-1)^n x^n = n(n-1)\ldots 1(\Delta x)^n,$$

$$(x+\overline{n+r}\Delta x)^n - \frac{n+r}{1}(x+\overline{r+n-1}\Delta x)^n + \frac{(n+r)\ (n+r-1)}{1.\ \ 2}$$

$$(x+\overline{r+n-2}\Delta x)^n - \ldots (-1)^{n+r}x^n = 0,\ r = 1, 2, \ldots$$

V. Sei $f(x) = \frac{1}{x(x+\Delta x)\ldots(x+r\Delta x)}$,

so ist

$$\Delta\frac{1}{x(x+\Delta x)\ldots(x+r\Delta x)}$$
$$= \frac{1}{(x+\Delta x)(x+2\Delta x)\,.\,.\,(x+\overline{r+1}\Delta x)} - \frac{1}{x(x+\Delta x)\,.\,.\,(x+r\Delta x)} =$$
$$= \frac{-(r+1)\Delta x}{x(x+\Delta x)\,.\,.\,(x+\overline{r+1}\Delta x)},$$

$$\vdots$$

$$\Delta^n\frac{1}{x(x+\Delta x)\ldots(x+r\Delta x)} = (-1)^n\frac{(r+1)(r+2)\ldots(r+n)(\Delta x)^n}{x(x+\Delta x)\ldots\ldots(x+\overline{r+n}\Delta x)}.$$

Setzt man dies in (3) und (4) des §. 2, so erhält man:

$$\frac{(-1)^n(r+1)(r+2)\ldots(r+n)(\Delta x)^n}{x(x+\Delta x)\ldots\ldots(r+\overline{r+n}\Delta x)}$$
$$= \frac{1}{(x+n\Delta x)(x+\overline{n+1}\Delta x)\,.\,.\,(x+\overline{n+r}\Delta x)}$$
$$- \frac{n}{1}\cdot\frac{1}{(x+\overline{n-1}\Delta x)(x+n\Delta x)\,.\,.\,(x+\overline{n+r-1}\Delta x)}$$
$$+ \frac{n(n-1)}{1.\,2}\cdot\frac{1}{(x+\overline{n-2}\Delta x)(x+\overline{n-1}\Delta x)\,.\,.\,(x+\overline{n+r-2}\Delta x)} - \,.\,.$$
$$\ldots(-1)^n\frac{1}{x(x+\Delta x)\,.\,.\,(x+r\Delta x)}.$$

$$\frac{1}{(x+n\Delta x)(x+\overline{n+1}\Delta x)\ldots(x+\overline{n+r}\Delta x)}$$
$$= \frac{1}{x(x+\Delta x)\,.\,.\,(x+r\Delta x)} + \frac{n}{1}\cdot\frac{-(r+1)\Delta x}{x(x+\Delta x)\ldots(x+\overline{r+1}\Delta x)}$$
$$+ \frac{n(n-1)}{1.\,2}\;\frac{(r+1)(r+2)(\Delta x)^2}{(x+\Delta x)\ldots(x+\overline{r+2}\Delta x)}$$
$$+ \ldots.$$
$$\vdots$$
$$\ldots.\;\frac{(-1)^n(r+1)(r+2)\,.\,.\,(r+n)(\Delta x)^n}{x(x+\Delta x)\ldots\ldots(x+\overline{n+r}\Delta x)},$$

u. s. f.

§. 4.

I. Ist die Funktion F(x) so beschaffen, daß $\Delta F(x)=f(x)$, so heißt F(x) ein endliches Integral von f(x), und pflegt mit $\Sigma f(x)$ bezeichnet zu werden, so daß die Gleichungen

$$\Sigma f(x)=F(x) \text{ und } f(x)=\Delta F(x), \qquad (1)$$

einander zur Folge haben.

Zu F(x) in (1) darf man offenbar noch eine Größe P setzen, die so beschaffen ist, daß sie sich nicht ändert, wenn x um Δx zunimmt. Solche Größen sind: alle nicht von x abhängenden Zahlen; $\sin\frac{2\pi x}{\Delta x}$, $\cos\frac{2\pi x}{\Delta x}$, und alle Funktionen dieser Größen u. s. w. Also, wenn man eine Funktion F(x) kennt, so beschaffen, daß $\Delta F(x)=f(x)$, so ist

$$\Sigma f(x)=F(x)+P, \qquad (2)$$

wo P die eben erwähnte Eigenschaft hat.

II. Es ist, wie leicht einzusehen, wenn U, V, W, ... Funktionen von x sind:

$$\Sigma(U\pm V\pm W \ldots)=\Sigma U\pm\Sigma V\pm\Sigma W \ldots +P, \qquad (2)$$

$$\Sigma kU=k\Sigma U, \text{ wenn k nicht von x abhängt.} \qquad (3)$$

III. Man findet leicht:

$$\Delta\left[x(x+\Delta x)\ldots(x+n\Delta x)\right]=(n+1)\Delta x.(x+\Delta x)\ldots(x+n\Delta x)$$

also $\Sigma(x+\Delta x)(x+2\Delta x)\ldots(x+n\Delta x)=\frac{x(x+\Delta x)\ldots(x+n\Delta x)}{(n+1)\Delta x}$,

wenn nicht $\Delta x=0$.

Setzt man hier $x-\Delta x$ an die Stelle von x, so ergibt sich:

$$\Sigma x(x+\Delta x)\ldots(x+\overline{n-1}\Delta x)=$$

$$\frac{(x-\Delta x)(x)(x+\Delta x)\ldots(x+\overline{n-1}\Delta x)}{(n+1)\Delta x} \qquad (4).$$

Eben so:

$$\Delta\Big(x(x-\Delta x)(x-2\Delta x)\ldots(x-n\Delta x)\Big)=$$

$$(n+1)\Delta x.\,x(x-\Delta x)\ldots(x-\overline{n-1}\Delta x),$$

also $\Sigma x(x-\Delta x)\ldots(x-\overline{n-1}\Delta x)=\frac{x(x-\Delta x)\ldots(x-n\Delta x)}{(n+1)\Delta x}$, (5),

Δx nicht 0.

$$\Delta.\frac{1}{x(x+\Delta x)\,..\,(x+\overline{n-1}\Delta x)}=\frac{-n\Delta x}{x(x+\Delta x)\,.\,.\,(x+n\Delta x)}$$

$$\Sigma\frac{1}{x(x+\Delta x)\,.\,.\,.\,(x+n\Delta x)}=$$

$$-\frac{1}{n\Delta x}.\frac{1}{x(x+\Delta x)\,..\,(x+\overline{n-1}\Delta x)}.\quad(6)$$

$$\Sigma a^x=\frac{a^x}{a^{\Delta x}-1},\ a^{\Delta x}>1,\quad(7)$$

$$\Sigma\sin x=-\frac{\cos\left(x-\frac{1}{2}\Delta x\right)}{2\sin\frac{\Delta x}{2}},\quad(8)$$

$$\Sigma\cos x=\frac{\sin\left(x-\frac{1}{2}\Delta x\right)}{2\sin\frac{\Delta x}{2}},\quad(9)$$

wie man leicht aus §. 1, II. ableiten wird.

IV. Da $\Delta.x^{m+1}=(m+1)x^m\Delta x+\frac{(m+1)m}{1.2}x^{m-1}(\Delta x)^2+\ldots$
$+(\Delta x)^{m+1}$,

so ist mithin:

$$x^{m+1}=(m+1)\Delta x\Sigma x^m+\frac{(m+1)m}{1.2}(\Delta x)^2\Sigma x^{m-1}+\ldots$$
$$+(\Delta x)^{m+1}\Sigma 1,$$

woraus:

$$\Sigma x^m=\frac{x^{m+1}}{(m+1)\Delta x}-\left[\frac{1}{2}m\Delta x\Sigma x^{m-1}+\frac{1}{3}\frac{m(m-1)}{1.2}(\Delta x)^2\Sigma x^{m-2}+\right.$$
$$\left.\ldots+\frac{1}{m+1}(\Delta x)^m\Sigma 1\right],\quad(10)$$

durch welche Formel nun Σx^m auf die Bestimmung von Σx^{m-1}, .. $\Sigma 1$ zurückgeführt ist.

Setzt man also zunächst $m=1$, so wird Σx durch $\Sigma 1=\frac{x}{\Delta x}$ bestimmt; ist dann $m=2$, so wird Σx^2 durch (das bekannte) Σx und $\Sigma 1$ bestimmt u. s. f. So erhält man:

$$\Sigma 1 = \frac{x}{\Delta x},$$

$$\Sigma x = \frac{x^2}{2\Delta x} - \frac{1}{2}x,$$

$$\Sigma x^2 = \frac{x^3}{3\Delta x} - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x\Delta x,$$

$$\Sigma x^3 = \frac{x^4}{4\Delta x} - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{4}x^2\Delta x,$$

$$\Sigma x^4 = \frac{x^5}{5\Delta x} - \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{3}x^3\Delta x - \frac{1}{30}x(\Delta x)^3,$$

$$\Sigma x^5 = \frac{x^6}{6\Delta x} - \frac{1}{2}x^5 + \frac{5}{12}x^4\Delta x - \frac{1}{12}x^2(\Delta x)^3,$$

$$\Sigma x^6 = \frac{x^7}{7\Delta x} - \frac{1}{2}x^6 + \frac{1}{2}x^5\Delta x - \frac{1}{6}x^3(\Delta x)^3 + \frac{1}{42}x(\Delta x)^5, \quad (11)$$

$$\vdots$$

§. 5.

II. Die nächst liegende Anwendung der Differenzenrechnung ist auf die Summirung der Reihen.

Man hat nämlich, wenn $f(x) = \Sigma F(x)$:

$$f(x+\Delta x) - f(x) = F(x),$$

$$f(x+2\Delta x) - f(x+\Delta x) = F(x+\Delta x),$$

$$f(x+3\Delta x) - f(x+2\Delta x) = F(x+2\Delta x),$$

$$\vdots$$

$$f(x+\overline{n+1}\Delta x) - f(x+n\Delta x) = F(x+n\Delta x),$$

also durch Summirung:

$$F(x) + F(x+\Delta x) + \ldots + F(x+n\Delta x) = f(x+\overline{n+1}\Delta x) - f(x) = \Sigma F(x+\overline{n+1}\Delta x) - \Sigma F(x), \quad (1)$$

wobei aber im zweiten Theile von dem Zufügen einer Funktion P (§. 4) nicht die Rede sein kann, wie man einsieht, indem dieselbe sich bei der Subtraktion aufheben würde. Die Reihe (1) ist nun eine wichtige Summirungsformel.

II. Für $F(x) = \sin x$, findet sich (§. 4, III):

$$\sin x+\sin(x+\Delta x)+\sin(x+2\Delta x)\ldots+\sin(x+n\Delta x)=$$

$$\frac{-\cos\left(x+\left(n+\frac{1}{2}\right)\Delta x\right)+\cos\left(x-\frac{1}{2}\Delta x\right)}{2\sin\frac{\Delta x}{2}}=$$

$$=\frac{\sin\left(x+\frac{n}{2}\Delta x\right)\sin(n+1)\frac{\Delta x}{2}}{\sin\frac{\Delta x}{2}}. \qquad (2)$$

Es lassen sich aus dieser Reihe manche anziehende Folgerungen ableiten, von denen einige aufgeführt werden mögen.

Setzt man $x=\frac{\pi}{2m}$, $\Delta x=\frac{\pi}{m}$, $n=m-1$, so erhält man:

$$\sin\frac{\pi}{2m}+\sin\frac{3\pi}{2m}+\sin\frac{5\pi}{2m}+\ldots+\sin\frac{(2m-1)\pi}{2m}=\frac{1}{\sin\frac{\pi}{2m}};$$

m positiv und ganz,

für $x=\frac{\Delta x}{2}=\frac{x}{2m+1}$, $n=m-1$:

$$\sin\frac{x}{2m+1}+\sin\frac{3\pi}{2m+1}+\sin\frac{5\pi}{2m+1}+\ldots+\sin\frac{(2m-1)\pi}{2m+1}=$$

$$\frac{\sin^2\frac{m\pi}{2m+1}}{\sin\frac{\pi}{2m+1}},\ \text{m positiv und ganz;}$$

für $x=\Delta x=\frac{\pi}{m}$, $n=m-2$:

$$\sin\frac{\pi}{m}+\sin\frac{2\pi}{m}+\ldots+\sin(m-1)\frac{\pi}{m}=\operatorname{cotg}\frac{\pi}{2m};\ \text{m wie oben,}$$

für $x=\frac{2\pi}{2m+1}=\Delta x$, $n=m-1$:

$$\sin\frac{2\pi}{2m+1}+\sin\frac{4\pi}{2m+1}+\ldots+\sin\frac{2m\pi}{2m+1}=\frac{1}{2}\operatorname{cotg}\frac{\pi}{2(2m+1)}.$$

III. Genau in derselben Weise erhält man:

$$\cos x+\cos(x+\Delta x)+\ldots+\cos(x+n\Delta x)=$$

$$\frac{\cos\left(x+n\frac{\Delta x}{2}\right)\sin(n+1)\frac{\Delta x}{2}}{\sin\frac{\Delta x}{2}}, \quad (3)$$

$$\cos\frac{\pi}{2m}+\cos\frac{3\pi}{2m}+\ldots+\cos\frac{(2m-1)\pi}{2m}=0,$$

$$\cos\frac{\pi}{2m+1}+\cos\frac{3\pi}{2m+1}+\ldots+\cos\frac{(2m-1)\pi}{2m+1}=\frac{1}{2},$$

$$\cos\frac{\pi}{m}+\cos\frac{2\pi}{m}+\ldots+\cos\frac{(m-1)\pi}{m}=0,$$

$$\cos\frac{2\pi}{2m+1}+\cos\frac{4\pi}{2m+1}+\ldots+\cos\frac{2m\pi}{2m+1}=-\frac{1}{2}.$$

IV. Deßgleichen findet sich:

$$\frac{1}{x(x+\Delta x)\ldots(x+r\Delta x)}+\frac{1}{(x+\Delta x)(x+2\Delta x)\ldots(x+\overline{r+1}\Delta x)}+\ldots$$

$$+\frac{1}{(x+n\Delta x)(x+\overline{n+1}\Delta x)\ldots(x+\overline{n+r}\Delta x)}$$

$$=-\frac{1}{r\Delta x}\cdot\frac{1}{(x+\overline{n+1}\Delta x)(x+\overline{n+2}\Delta x)\ldots(x+\overline{n+r}\Delta x)}$$

$$+\frac{1}{r\Delta x}\cdot\frac{1}{x(x+\Delta x)\ldots(x+\overline{r-1}\Delta x)}. \quad (4)$$

Sei z. B. $x=\Delta x=1$:

$$\frac{1}{1.2\ldots(r+1)}+\frac{1}{2.3.4\ldots(r+2)}+\frac{1}{3.4\ldots(r+3)}+\ldots$$

$$+\frac{1}{(n+1)(n+2)\ldots(n+r+1)}=$$

$$-\frac{1}{r}\cdot\frac{1}{(n+2)(n+3)\ldots(n+r+1)}+\frac{1}{r}\cdot\frac{1}{1.2\ldots r}.$$

Läßt man hier n unendlich groß werden, so ist:

$$\frac{1}{1.2\ldots(r+1)}+\frac{1}{2.3\ldots(r+2)}+\ldots=\frac{1}{r.1.2\ldots r}.$$

So für $r=1$:

$$\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\ldots+\frac{1}{(n+1)(n+2)}=1-\frac{1}{n+2}=\frac{n+1}{n+2},$$

$$\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\ldots\ldots=1.$$

Für r=2:

$$\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{2.3.4}+\ldots+\frac{1}{(n+1)\,(n+2)\,(n+3)}=\frac{1}{4}-$$
$$\frac{1}{2}.\,\frac{1}{(n+2)\,(n+3)},$$
$$\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{2.3.4}+\ldots\ldots=\frac{1}{4}.$$

u. s. w.

V. Aus (4) in §. 4 folgt:

$$x(x+\Delta x)\ldots(x+\overline{r-1}\,\Delta x)+(x+\Delta x)\ldots(x+r\Delta x)\ldots+$$
$$(x+n\Delta x)\,(x+\overline{n+1}\,\Delta x)\ldots(x+\overline{n+r-1}\,\Delta x)$$
$$=\frac{(x+n\Delta x)\,(x+\overline{n+1}\,\Delta x)\ldots(x+\overline{n+r}\,\Delta x)}{(r+1)\Delta x}-$$
$$\frac{(x-\Delta x)x(x+\Delta x)\ldots(x+\overline{r-1}\,\Delta x)}{(r+1)\Delta x}.$$

Für $x=\Delta x=1$:

$$1.2.3\ldots r+2.3\ldots(r+1)+\ldots+(n+1)\,(n+2)\ldots(n+r)=$$
$$\frac{(n+1)\,(n+2)\ldots(n+r+1)}{r+1},$$

woraus:

$$1+\frac{r+1}{1}+\frac{(r+1)\,(r+2)}{1.2}+\ldots+\frac{(n+1)\,(n+2)\ldots(n+r)}{1.\;2\;\ldots\ldots r}=$$
$$\frac{(n+1)\,(n+2)\ldots(n+r+1)}{1.\;2\;.\;.\;.\;(r+1)},$$

die Summirungsformel für die sogenannten figurirten Zahlen (arithmetische Reihen höherer Ordnung). Z. B. für r=3:

$$1+4+10+\ldots+\frac{(n+1)\,(n+2)\,(n+3)}{1.\;2.\;3}=$$
$$\frac{(n+1)\,(n+2)\,(n+3)\,(n+4)}{1.\;2.\;3.\;4},$$

oder wenn man n—1 statt n setzt:

$$1+4+10+\ldots+\frac{n(n+1)\,(n+2)}{1.\;2.\;3}=\frac{n(n+1)\,(n+2)\,(n+3)}{1.\;2.\;3.\;4}$$

u. s. w.

VI. Aus den Formeln (11) des §. 4 zieht man:

$$x+(x+\varDelta x)+(x+2\varDelta x)+\ldots+(x+n\varDelta x)=\frac{(x+\overline{n+1}\varDelta x)^2}{2\varDelta x}-$$
$$\frac{1}{2}(x+\overline{n+1}\varDelta x)-\frac{x^2}{2\varDelta x}+\frac{1}{2}x,$$

$$x^2+(x+\varDelta x)^2+(x+2\varDelta x)^2+\ldots(x+n\varDelta x)^2=\frac{(x+\overline{n+1}\varDelta x)^3}{3\varDelta x}-$$
$$\frac{1}{2}(x+\overline{n+1}\varDelta x)^2+\frac{1}{6}\varDelta x(x+\overline{n+1}\varDelta x)-\frac{x^3}{3\varDelta x}+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{6}x\varDelta x,$$

$$x^3+(x+\varDelta x)^3+(x+2\varDelta x)^3+\ldots(\varDelta x+nx)^3=\frac{(x+\overline{n+1}\varDelta x)^4}{4\varDelta x}-$$
$$\frac{1}{2}(x+\overline{n+1}\varDelta x)^3+\frac{1}{4}\varDelta x(x+\overline{n+1}\varDelta x)^2-\frac{x^4}{4\varDelta x}+\frac{1}{2}x^3-\frac{1}{4}x^2\varDelta x.$$

u. s. f.

Z. B. für $x=\varDelta x=1$:

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+(n+1)^2=\frac{(n+2)^3}{3}-\frac{1}{2}(n+2)^2+\frac{1}{6}(n+2)-$$
$$\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{6}=\frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6},$$

$$1^3+2^3+3^3+\ldots+(n+1)^3=\frac{(n+2)^4}{4}-\frac{1}{2}(n+2)^3+\frac{1}{4}(n+2)^2-$$
$$\frac{1}{4}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{(n+2)^2(n^2+2n+1)}{4}.$$

VII. In derselben Weise kann man andere Summationen zu Stande bringen, wovon ein Beispiel folgen möge.

Man habe die Reihe

$$x^r a^x+(x+\varDelta x)^r a^{x+\varDelta x}+\ldots\ldots+(x+n\varDelta x)^r a^{x+n\varDelta x}$$

zu summiren. Hiebei handelt es sich um $\Sigma(x+\overline{n+1}\varDelta x)^r a^{x+\overline{n+1}\varDelta x}$ und $\Sigma x^r a^x$, d. h. um letzteres.

Nun ist

$$\varDelta x^r a^x=(x+\varDelta x)^r a^{x+\varDelta x}-x^r a^x$$
$$=(a^{\varDelta x}-1)x^r a^x+\frac{r}{1}\varDelta x.a^{\varDelta x}x^{r-1}a^x+\frac{r.(r-1)}{1.2}(\varDelta x)^2.$$
$$a^{\varDelta x}.x^{r-2}a^x+\ldots,$$

woraus man leicht schließen wird:

$$\Sigma x^r a^x=\frac{x^r a^x}{a^{\varDelta x}-1}-\frac{a^{\varDelta x}}{a^{\varDelta x}-1}\left[\frac{r\varDelta x}{1}\Sigma x^{r-1}a^x+\right.$$
$$\left.\frac{r(r-1)}{1.2}(\varDelta x)^2\Sigma x^{r-2}a^x+\ldots\right],$$

wodurch nun $\Sigma x^r a^x$ auf $\Sigma x^{r-1}a^x$, dies auf $\Sigma x^{r-2}a^x$, ... also alle endlich auf Σa^x zurückgeführt werden. So ist

$$\Sigma x^3 a^x = \frac{x^3 a^x}{a^{\Delta x} - 1} - \frac{a^{\Delta x}}{a^{\Delta x} - 1} \cdot$$

$$\left[\frac{3\Delta x}{1} \Sigma x^2 a^x + 3(\Delta x)^2 \Sigma x a^x + (\Delta x)^3 \Sigma a^x\right],$$

$$\Sigma x^2 a^x = \frac{x^2 a^x}{a^{\Delta x} - 1} - \frac{a^{\Delta x}}{a^{\Delta x} - 1} \left[\frac{2\Delta x}{1} \Sigma x a^x + (\Delta x)^2 \Sigma a^x\right],$$

$$\Sigma x a^x = \frac{x a^x}{a^{\Delta x} - 1} - \frac{a^{\Delta x}}{a^{\Delta x} - 1} \Delta x \Sigma a^x.$$

So findet man dann die Summe der vorgelegten Reihe.

§. 6.

I. Ist man im Stande, die Reihe

$$f(x) + f(x + \Delta x) + f(x + 2\Delta x) + \ldots + f(x + n\Delta x)$$

zu summiren, so kann man auch die Summe der Reihe

$$f(x) - f(x + \Delta x) + f(x + 2\Delta x) - f(x + 3\Delta x) + \ldots$$
$$+ f(x + 2n\Delta x)$$

daraus finden.

Sei nämlich:

$$f(x) + f(x + \Delta x) + f(x + 2\Delta x) + \ldots + f(x + n\Delta x) =$$
$$F(x, n, \Delta x), \qquad (1)$$

wo $F(x, n, \Delta x)$ eine von x, n, Δx abhängende Größe bezeichnet, wie etwa $\sin(x + n\Delta x)$ u. s. f. Ebenso wird $F(x, 2n, \Delta x)$ das bezeichnen, was aus $F(x, n, \Delta x)$ wird, wenn man $2n$ an die Stelle von n setzt u. s. w.

Daraus folgt nun, wenn man $2\Delta x$ an die Stelle von Δx setzt:

$$f(x) + f(x + 2\Delta x) + f(x + 4\Delta x) \ldots + f(x + 2n\Delta x) =$$
$$F(x, n, 2\Delta x). \qquad (2)$$

Eben so, wenn man die Reihe (1) bis zum $(2n+1)$ten Gliede fortlaufen läßt:

$$f(x) + f(x + \Delta x) + f)x + 2\Delta x) + \ldots + f(x + 2n\Delta x) =$$
$$F(x, 2n, \Delta x). \qquad (3)$$

Nimmt man nun die Reihe (2) doppelt und subtrahirt davon (3), so findet sich:

$$f(x) - f(x + \Delta x) + f(x + 2\Delta x) - f(x + 3\Delta x) + \ldots$$
$$- f(x + \overline{2n - 1}\,\Delta x) + f(x + 2n\Delta x) = 2F(x, n, 2\Delta x)$$
$$- F(x, 2n, \Delta x). \qquad (4)$$

II. So ist (§. 5):

$$\sin x - \sin(x+\Delta x) + \sin(x+2\Delta x) - \sin(x+3\Delta x) + \ldots\ldots + \sin(x+2n\Delta x) = 2.\frac{\sin(x+n\Delta x)\sin(n+1)\Delta x}{\sin\Delta x} - \frac{\sin(x+n\Delta x)\sin(2n+1)\frac{\Delta x}{2}}{\sin\frac{\Delta x}{2}}$$

$$= \frac{\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\Delta x.\ \sin(x+n\Delta x)}{\cos\frac{\Delta x}{2}}. \quad (5)$$

$$\cos x - \cos(x+\Delta)x + \cos(x+2\Delta x) - \ldots + \cos(x+2n\Delta x)$$

$$= \frac{2\cos(x+n\Delta x)\sin(n+1)\Delta x}{\sin\Delta x} - \frac{\cos(x+n\Delta x)\sin(2n+1)\frac{\Delta x}{2}}{\sin\frac{\Delta x}{2}}$$

$$= \frac{\cos(x+n\Delta x)\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\Delta x}{\cos\frac{\Delta x}{2}}. \quad (6)$$

u. s. w.

§. 7.

I. Eine zweite Anwendung der Differenzenrechnung soll die auf die Interpolation sein. Diese Aufgabe wurde zwar schon im vierten Abschnitt behandelt, allein dort wurde die zu suchende Funktion als ganze Funktion vorausgesetzt. In dieser Beschränktheit darf aber die Aufgabe nicht bleiben, wir fassen sie daher von einem allgemeinern Standpunkte aus auf.

Wenn man eine Reihe Größen

$$y_0,\ y_1,\ y_2,\ \ldots\ y_n \qquad (1)$$

hat, die sich nach einem gewissen Gesetz bilden, so daß y etwa im Allgemeinen als eine Funktion von x angesehen werden kann, so ist man auch berechtigt, y^n als eine Funktion von n, welches letztere in (1) allerdings als ganze, positive Zahl zunächst auftrat, anzusehen und also zu setzen: $y_n = f(n)$. Von diesem Gesichtspunkt aus kann man fragen, zu was y_n wird bei irgend einem beliebigen Werth von n z. B. m, wo m nicht gerade eine positive ganze Zahl sein muß (doch wollen

wir unsere Betrachtung auf die reellen Zahlen beschränken). Die Antwort ist leicht: y_n wird alsdann zu f(m).

Nimmt man also allgemein $y=f(x)$, so wird y zu $y_0, y_1, .. y_n$, wenn x zu 0, 1, 2, .. n wird. Für jeden andern Werth von x ist das zugehörige y offenbar nach demselben Gesetze gebildet. Z. B. die Reihe:

$$1.2,\ 2.3,\ 3.4,\ \ldots.$$

hat als Gesetz $f(x)=(x+1)(x+2)$. Das $x=2\frac{1}{3}$ entsprechende Glied ist also $3\frac{1}{3}.\ 4\frac{1}{3}$ und dieses Glied ist, seinem Werthe und seiner Stellung nach, eingeschoben (interpolirt) zwischen das $x=2$ und das $x=3$ entsprechende Glied.

Das Interpolationsproblem wäre demnach leicht zu lösen, wenn jeweils das allgemeine Glied, d. h. das Gesetz der Reihe gegeben wäre. So einfach liegt aber die Aufgabe in der Regel nicht, sondern man kennt nur eine Reihe besonderer Werthe von zusammengehörigen x und y, aus denen nun y als Funktion von x zu bestimmen sein würde, um daraus die etwaigen Zwischenwerthe (Interpolationen) berechnen zu können. Wüßte man, daß y eine ganze Funktion des nten Grades von x sein soll und sind (n+1) Werthe von x und y gegeben, so kann nach dem vierten Abschnitt die Aufgabe vollständig gelöst werden.

Nehmen wir an, die n gegebenen Werthe von x wachsen nach gleichen Unterschieden, so daß sie:

$x_1,\ x_1+\Delta x,\ x_1+2\Delta n, \ldots x_1+\overline{n-1}\Delta x$, und die entsprechenden Werthe von y:

$$y_1,\ y_2,\ y_3,\ \ldots\ y_n$$

seien, so ist offenbar:

$$y_2-y_1=\Delta y_1,$$
$$y_3-y_2=\Delta y_2,$$
$$\vdots$$
$$\Delta y_2-\Delta y_1=\Delta^2 y_1$$
$$\vdots$$

oder, wenn man dies übersichtlich zusammenstellt:

x =	y =				
x_1	y_1	$y_2-y_1=\Delta y_1$	$\Delta y_2-\Delta y_1=\Delta^2 y_1$	$\Delta^2 y_2-\Delta^2 y_1=\Delta^3 y_1$	u. s. f.
$x_1+\Delta x$	y_2	$y_3-y_2=\Delta y_2$	$\Delta y_3-\Delta y_2=\Delta^2 y_2$		
$x_1+2\Delta x$	y_3	$y_4-y_3=\Delta y_3$			
. . . .	. . . .	. . . .	. . . .	. . . .	
$x_1+\overline{n-1}\Delta x$	y_n	$y_n-y_{n-1}=\Delta y_{u-1}$	$\Delta y_{n-1}-\Delta y_{n-2}=\Delta^2 y_{n-2}$	$\Delta^2 y_{n-2}-\Delta^2 y_{n-3}=\Delta^3 y_{n-3}$	

Betrachtet man nun den Ausdruck

$$y_1 + \frac{z-x_1}{\Delta x}\Delta y_1 + \frac{(z-x_1)\,(z-x_1-\Delta x)}{1.\quad 2(\Delta x)^2}\Delta^2 y_1 + \dots$$

$$+ \frac{(z-x_1)\,(z-x_1-\Delta x)\,..\,(z-x_1-\overline{n-2}\Delta x)}{1.\ 2\ .\ .\ .\ .\ (n-1)\ (\Delta x)^{n-1}}\Delta^{n-1}y_1 = K, \quad (2)$$

so wird für:

$z = x_1$ derselbe zu y_1,

$z = x_1 + \Delta x$ derselbe zu $y_1 + \Delta y_1 = y_2$,

$z = x_1 + 2\Delta x$ " " $y_1 + 2\Delta y_1 + \Delta^2 y_1 = y_3$,

.
.
.

$$z = x_1 + \overline{n-1}\Delta x \text{ zu } y_1 + (n-1)\Delta y_1 + \frac{(n-1)\,(n-2)}{1.\ 2}\Delta^2 y_1 + \dots$$

$$+ \Delta^{n-1}y_1 = y_n,$$

wie man aus Formel (4) in §. 2 findet, wenn man beachtet, daß $f(x) = y_1$, $f(x + r\Delta x) = y_{r+1}$ ist.

Der Ausdruck (2) ist vom $(n-1)$ten Grade in Bezug auf z und wird für die n Werthe von z : x_1, $x_1 + \Delta x_1$, ... $x_1 + (n-1)\Delta x$ zu y_1, y_2, ... y_n, also muß er identisch sein mit dem in Formel (7) des vierten Abschnitts gegebenen (eben daselbst III.), wenn man dort $x_1 = x_1$, $x_2 = x_1 + \Delta x_1$ ..., $y_1 = y_1$, $y_2 = y_2$, ... setzt.

Wie wir in §. 3, IV. gesehen, oder daraus leicht schließen können, ist allgemein

$$\Delta^{n+1}(a x^n + b x^{n-1} + \dots + k) = 0,$$

so daß, wenn y eine Funktion des $(n-1)$ten Grades ist, ihre nten Differenzen Null sein werden, was der Grund ist, warum die Reihe (2) mit $\Delta^{n-1}y_1$ schließt. Nun lassen sich manche Funktionen, z. B. $\sin x$, $\cos x$, e^x, $l(1+x)$, ... in (unendliche) Reihen, die lauter ganze Potenzen von x enthalten, entwickeln, wie wir dies früher gesehen. Die Formel (2) wird also auch für solche Funktionen zulässig sein, nur wird, eben weil im Allgemeinen die Reihen ins Unendliche laufen, auch $n = \infty$ sein, d. h. die Formel (2) zu einer unendlichen Reihe werden. Sind aber Δy_1, $\Delta^2 y_1$, ... so beschaffen, daß sie sehr rasch abnehmen, so wird man, da im Allgemeinen der Koeffizient

$$\frac{(z-x_1)\,(z-x_1-\Delta x)\ \dots\ (z-x_1-\overline{n-2}\Delta x)}{1.\quad 2\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (n-1)\,(\Delta x)^{n-1}}, \text{ wenn } z-x_1 < \Delta x,$$

immer kleiner als $\frac{1.2\ \dots\ (n-2)}{1.2\ \dots\ (n-1)}$ ist, die spätern Glieder vernachlässigen, also etwa bloß

$$y_1 + \frac{z-x_1}{\Delta x}\Delta y_1 + \frac{(z-x_1)(z-x_1-\Delta x)}{1.\,2\,(\Delta x)^2}\Delta^2 y_1 + \ldots$$
$$+ \frac{(z-x_1)(z-x_1-\Delta x)\ldots(z-x_1-\overline{r-1}\Delta x)}{1.\,2\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,r(\Delta x)^r}\Delta^r y_1 \quad (3)$$

beizubehalten brauchen. Um $\Delta y_1, \Delta^2 y_1 \ldots \Delta^r y_1$ zu berechnen, bedarf es aber, wie man aus dem Obigen ersieht, $r+1$ zusammengehöriger Werthe von x und y. Da die Formel (2), oder (3) die Werthe von y gibt für $z=x_1,\ x_1+\Delta x, \ldots$, so wird man, unter allen obigen Voraussetzungen, den $z=x$ (wo x beliebig ist) entsprechenden Werth von y finden, wenn man in (3) $z=x$ setzt.

Faßt man Alles zusammen, so erhält man folgenden Satz:

Seien $y_1, y_2, y_3, \ldots$ Werthe von y (das wir als Funktion von z ansehen) welche den Werthen $x_1,\ x_1+\Delta x,\ x_1+2\Delta x, \ldots$ von z entsprechen, seien $\Delta y_1, \Delta^2 y_1, \ldots$ rasch abnehmende Größen, y ferner für die betrachteten Werthe von z in eine nach ganzen Potenzen von z aufsteigende (endliche oder unendliche) Reihe entwickelbar, so wird, in so ferne $x-x_1 < \Delta x$, die Größe

$$y_1 + \frac{z-x_1}{\Delta x}\Delta y_1 + \frac{(z-x_1)(z-x_1-\Delta z)}{1.\,2\,(\Delta x)^2}\Delta^2 y_1 + \ldots \quad (4)$$

den Werth von y für x geben, wenn $z=x$.

II. Wählen wir Beispiele:

1) Sei $\sin 37^3/_4{}^0$ zu entwickeln. Bekanntlich ist sin x für alle Werthe von x durch eine unendliche, nach ganzen Potenzen von x aufsteigende Reihe ausdrückbar (siebenter Abschnitt), also gilt die Formel (4) für alle Werthe von x, x_1, Δx. Sei nun $y=\sin z$, so ist, wenn $\Delta x=1$:

$x =$	$y =$	Δy:	$\Delta^2 y$:	$\Delta^3 y$:	$\Delta^4 y$:
37°	0·6018150	0·0138465	−0·0001876	−0·0000041	−0·0000000
38°	0·6156615	0·0136589	−0·0001917	−0·0000041	
39°	0·6293204	0·0134672	−0·0001958		
40°	0·6427876	0·0132714			
41°	0·6560590				

$x = 37^3/_5$, $x - x_1 = {}^3/_4 < 1$

d. h. $x - x_1 < \Delta x$.

Jetzt ist in (4), wenn $x=37^3/_4$, $\Delta x=1$, $x-x_1=\frac{3}{4}$:

$$y_1 = \quad 0{\cdot}6018150$$

$$(x-x_1)\Delta y_1 = \quad 0{\cdot}0103849$$

$$\frac{(x-x_1)\,(x-x_1-\Delta x)}{1.\quad 2.\quad (\Delta x)^2}\Delta^2 y_1 = \quad 0{\cdot}0000176$$

$$\frac{(x-x_1)\,(x-x_1-\Delta x)\,(x-x_1-2\Delta x)}{1.\quad 2.\quad 3\quad (\Delta x)^3}\Delta^3 y_1 = -0{\cdot}0000002$$

$$y=\sin 37\frac{3}{4}^0 = \quad 0{\cdot}6122153$$

2) Sei $\log(\pi)=\log(3{\cdot}14159265)$ zu suchen.

Sei $x_1=3{\cdot}14$, $\Delta x=0{\cdot}01$, $x=3{\cdot}14159265$, also $x-x_1<\Delta x$, die Größe $l(z)=\log(x_1+z-x_1)=\log(x_1)+\log\left(1-\frac{z-x_1}{x_1}\right)$ läßt sich in eine nach ganzen Potenzen von z aufsteigende Reihe entwickeln, da $\frac{z-x_1}{x_1}<1$ (neunter Abschnitt III.), was richtig bleibt für die Werthe x_1, $x_1+\Delta x$, . . . die hier betrachtet werden, da $\frac{3{\cdot}18-3{\cdot}14}{3{\cdot}14}<1$.

Nun ist

z=	y=	Δy=	Δ²y=	Δ³y=	Δ⁴y=
3·14	0·496929648				
		0·001380905			
3·15	0·498310553		−0·000004377		
		0·001376529		0·000000027	
3·16	0·499687082		−0·000004349		−0·000000000
		0·001372179		0·000000027	
3·17	0·501059262		−0·000004321		
		0·001367858			
3·18	0·502427120				

woraus nun:

$$\log(\pi)=0{\cdot}497149872.$$

Es sind hier die briggischen Logarithmen gemeint.

III. Darf man schon $\Delta^2 y_1$ vernachlässigen, so hat man

$$y=y_1+\frac{z-x_1}{\Delta x}\Delta y_1\,,$$

oder wenn $\Delta x=1$:

$$y=y_1+(z-x_1)\Delta y_1\,,$$

was bekanntlich die Art ist, wie bei logarithmischen und trigonometrischen Tafeln verfahren wird. Z. B. Man solle log 234578 suchen, $x_1=234570$, $\Delta x=10$, $x=2345788$, $x-x_1=8$, $x-x_1<\Delta x$.

z =	log(z)=y:	Δy_1 =
234570	5·3702725	0·0000185
234580	5·3702910	

also $\log(x)=\log(234578)=5{\cdot}3702525+\frac{8}{10}\cdot 0{\cdot}0000185$,

genau das gewöhnliche Verfahren.

IV. Man sieht leicht ein, wie das in I. und II. gelehrte Verfahren zur Berechnung von Tafeln, z. B. den logarithmischen und trigonometrischen benützt werden kann. Man berechnet z. B. den sin x für eine Reihe Werthe von x unmittelbar (etwa nach Formel (21) des siebenten Abschnitts); für die zwischenliegenden Werthe von x findet man dann sin x vermittelst des obigen Verfahrens u. s. w.

Vierzehnter Abschnitt.

Allgemeinere Betrachtung der Funktionen. Stetigkeit. Gränzwerthe.

I. Wir haben bereits im dritten Abschnitte I. gesagt, was man unter einer Funktion zu verstehen habe. Im Laufe unserer Untersuchungen haben wir Gelegenheit gehabt, manche Funktionen einer Stammgröße näher kennen zu lernen, und wir wollen nun im Allgemeinen einige Untersuchungen über dieselben anstellen.

II. Schon am angeführten Orte wurde der Begriff der Stetigkeit einer Funktion aufgestellt. Wir werden ihn jetzt etwas genauer feststellen können.

Ist f(x) eine Funktion von x und ändert sich x, indem es zu $x+\Delta x$ wird, so wird f(x) zu $f(x+\Delta x)$, hat also um $\Delta f(x)=f(x+\Delta x)-f(x)$ (dreizehnter Abschn. §. 1, I.) zugenommen. Ist nun Δx eine Größe, die sich der Null unbegränzt nähert, so muß auch, wenn f(x) für den

betrachteten Werth von x **stetig** sein soll, $f(x+\Delta x)-f(x)$ eine solche Größe sein. Betrachten wir nun den Quotienten $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$, so ist klar, daß wenn Δx unbegränzt gegen Null geht, $f(x+\Delta x)-f(x)$ aber nicht, der Bruch unbegränzt wächst. In diesem Falle ist aber die Funktion f(x) unstetig. Soll also $f(x+\Delta x)-f(x)$ eine Größe von der Art der Δx sein, so wird obiger Bruch bei schrankenloser Abnahme des Δx sich einem bestimmten, endlichen Werthe nähern müssen. Geschieht dies, so ist die Funktion f(x) jedenfalls stetig. Wir haben also ein immer untrügliches Kennzeichen für die Stetigkeit einer Funktion. Es heißt so:

Nähert sich bei dem gegebenen Werthe von x die Größe

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \qquad (1)$$

bei unbegränzter Abnahme von Δx einer bestimmten endlichen Größe, so ist f(x) für jenen Werth von x stetig.

Umgekehrt ist der Satz nicht allgemein richtig, daß nämlich die Funktion unstetig sei, wenn (1) unendlich wird. Aber in der Allgemeinheit, in der der Satz so eben ausgesprochen wurde, ist er von Wichtigkeit. Um die letzte Bemerkung durch ein Beispiel zu erläutern, wollen wir die Funktion $\sqrt{x}$ betrachten. Alsdann ist

$$f(x+\Delta x)-f(x)=\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}=\sqrt{1+\frac{\Delta x}{x}}\cdot\sqrt{x}-\sqrt{x}=$$

$$\left(1+\frac{1}{2}\frac{\Delta x}{x}-\frac{1}{2.4}\frac{(\Delta x)^2}{x^2}+\ldots\right)\sqrt{x}-\sqrt{x}, \text{ wenn}$$

$\frac{\Delta x}{x}<1$, (achter Abschnitt (14)).

Also ist $\frac{\sqrt{(x+\Delta x)}-\sqrt{x}}{\Delta x}=\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x}-\frac{1}{8}\frac{\Delta x}{x^2}+\ldots\right)\sqrt{x}=$
$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{8}\frac{\Delta x}{x\sqrt{x}}+\ldots$, was für Δx unendlich abnehmend sich der Gränze $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ nähert, so daß, wenn wir durch Vorsetzung des Zeichens G diese Gränze bezeichnen:

$$G\,\frac{\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}}{\Delta x}=\frac{1}{2\sqrt{x}}. \qquad (2)$$

Für x=0 ist dies $=\infty$, obwohl für x=0: $\sqrt{0+\Delta x}-\sqrt{0}=\sqrt{\Delta x}$ auch verschwindend klein ist mit Δx. Uebrigens erleidet $\sqrt{x}$

für $x = 0$ doch eine Aenderung. Läßt man nämlich das positive x durch 0 zum Negativen übergehen, so wird $\sqrt{x}$ imaginär. Dies hängt jedoch nicht zusammen mit der Größe (1).

Für $f(x) = tg\,x$ hat man:

$$tg(x+\varDelta x)-tg(x)=\frac{\sin\varDelta x}{\cos(x+\varDelta x)\cos x}=$$

$$\frac{\varDelta x-\frac{(\varDelta x)^3}{1.2.3}+\frac{(\varDelta x)^5}{1.2.3.4.5}-\dots}{\cos^2 x(\cos\varDelta x)-\sin x\cos x\sin\varDelta x}=$$

$$\frac{\varDelta x-\frac{(\varDelta x)^3}{1.2.3}+\frac{(\varDelta x)^5}{1.2.3.4.5}-\dots\dots\dots}{\cos^2 x\left(1-\frac{(\varDelta x)^2}{1.2}+\dots\right)-\sin x\cos x\left(\frac{\varDelta x}{1}-\frac{(\varDelta x)^3}{1.2.3}+\dots\right)}$$

also $\frac{tg(x+\varDelta x)-tg(x)}{\varDelta x}=$

$$\frac{1-\frac{\varDelta x^2}{1.2.3}+\dots}{\cos^2 x\left(1-\frac{\varDelta x^2}{1.2}+\dots\right)-\sin x\cos x\left(\frac{\varDelta x}{1}-\dots\right)},$$ was

auch $\varDelta x$ sei.

Läßt man $\varDelta x$ zur Null herabsinken, so erhält man:

$$G\,\frac{tg(x+\varDelta x)-tg\,x}{\varDelta x}=\frac{1}{\cos^2 x}. \quad (3)$$

Für $x=\frac{\pi}{2}$ wird diese Größe ∞, und wirklich ist auch $tg\,x$ für $x=\frac{\pi}{2}$ unstetig, da $tg\frac{\pi}{2}=\infty$ ist.

III. Wir haben im Laufe unserer Untersuchungen mehrfach Gelegenheit gehabt, Gränzbestimmungen vorzunehmen. So im ersten Abschnitte V. wurde die Gränze von $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ für ein schrankenlos wachsendes m gleich e gefunden; im zehnten Abschnitt IX. wurde gezeigt, daß

$$\frac{\sin\frac{\alpha}{2m}}{\sin\frac{p\pi}{4m}}=\frac{\frac{\alpha}{2m}-\frac{\alpha^3}{6(2m)^3}+\dots\dots}{\frac{p\pi}{4m}-\frac{1}{6}\cdot\frac{p^3\pi^3}{4^3m^3}+\dots\dots}=$$

$$\frac{\frac{4\alpha}{2}-\frac{4.\alpha^3}{6.2^3m^2}+\dots\dots}{p\pi-\frac{4}{6}\cdot\frac{p^3\pi^3}{4^3m^2}+\dots\dots}$$

mit unendlich wachsendem m der Gränze $\frac{2\alpha}{p\pi}$ sich nähert; eben so $2m\sin\frac{\alpha}{2m}$ der Gränze α u. s. w.

Wir wollen nun hier noch einige solcher Gränzbestimmungen vornehmen, zuerst aber zwei sehr brauchbare Lehrsätze in diesem Betreff aufstellen.

IV. Wenn für wachsende Werthe von x die Differenz $f(x+1)-f(x)$ sich einer gewissen Gränze k nähert, so nähert sich $\frac{f(x)}{x}$ für eben solche Werthe von x derselben Gränze.

Gesetzt zuerst k sei eine endliche Größe. Da mit wachsenden Werthen von x die Größe $f(x+1)-fx$ sich der k nähert, so wird man h groß genug annehmen können, daß $f(x+1)-f(x)$, wenn $x \overline{\overline{>}} h$, immer zwischen $k-\alpha$ und $k+\alpha$ enthalten ist, wenn α eine sehr kleine Größe ist. Daraus folgt, daß also die n Größen

$$\begin{array}{l} f(h+1)-f(h) \\ f(h+2)-f(h+1) \\ \vdots \\ \vdots \\ f(h+n)-f(h+n-1) \end{array}$$

immer zwischen $k-\alpha$ und $k+\alpha$ enthalten sind. Ihre Summe ist $f(h+n)-f(h)$. Dieselbe überschreitet somit nicht $n(k-\alpha)$ und $n(k+\alpha)$, d. h. $\frac{f(h+n)-f(h)}{n}$ ist gleichfalls zwischen $k-\alpha$ und $k+\alpha$. Man wird also berechtigt sein, anzunehmen:

$$\frac{f(h+n)-f(h)}{n}=k+\beta, \quad (5), \ \beta=0 \text{ für } n=\infty,$$

worin β sehr klein ist. Sei nun $h+n=x$, so gibt (5), da $n=x-h$:

$$\frac{f(x)-f(h)}{x-h}=k+\beta,$$

$$f(x)=f(h)+(x-h)(k+\beta)$$

$$\frac{f(x)}{x}=\frac{f(h)}{x}+k+\beta-\frac{h}{x}(k+\beta).$$

Läßt man x unbegränzt wachsen (d. h. eigentlich n), so wird β

sich der Null unbegränzt nähern, deßgleichen $\frac{f(h)}{x}$, da f(h) eine bestimmte Größe ist, und eben so $\frac{h}{x}$, so daß

$$G_\infty \frac{f(x)}{x} = k, \quad (6)$$

wo das angehängte ∞ an G bedeutet, daß $x = \infty$ genommen werden soll. In so weit ist der Lehrsatz nachgewiesen.

Ist $k = \infty$, so kann man h groß genug nehmen, daß $f(h+1) - f(h)$ größer werde, als irgend eine beliebige große Zahl H. Man folgert daraus wie oben

$$\frac{f(h+n) - f(h)}{n} > H$$

oder

$$\frac{f(x) - f(h)}{x-h} > H$$

$$\frac{f(x)}{x} > \frac{f(h)}{x} + H - \frac{Hh}{x}.$$

Läßt man x (d. h. n) unendlich wachsen, so wird immerhin $G_\infty \frac{f(x)}{x} > H$, was auch H sei, d. h. $G_\infty \frac{f(x)}{x}$ wird gleichfalls unendlich.

Ist $k = -\infty$, so wird

$$G_\infty \left(-f(x+1) + f(x)\right) = +\infty,$$

d. h.

$$G_\infty \left[-f(x+1) - \left(-f(x)\right)\right] = +\infty,$$

also nach dem Obigen $G_\infty \left(\frac{-f(x)}{x}\right) = +\infty$, d. h. $G_\infty \frac{f(x)}{x} = -\infty$.

Der Lehrsatz ist also allgemein nachgewiesen.

V. Als Beispiele zu dem vorstehenden Lehrsatze mögen folgende dienen:

1) Sei zu untersuchen, zu was $\frac{l(x)}{x}$ wird mit unendlich wachsendem x.

Es ist $f(x) = l(x)$, $f(x+1) - f(x) = l(x+1) - l(x) = l\left(\frac{x+1}{x}\right) =$

$l\left(1+\frac{1}{x}\right)$. Läßt man nun x unendlich wachsen, so wird $\frac{1}{x}$ zu Null, also $l\left(1+\frac{1}{x}\right)$ zu $l(1)=0$, folglich ist auch

$$G_\infty \frac{l(x)}{x} = 0.$$

Daraus folgt, daß die Logarithmen der Zahlen weit langsamer wachsen, als die Zahlen selbst.

2) Man verlangt den Werth von $\frac{a^x}{x}$ für $x=\infty$. $f(x+1)-f(x)=a^{x+1}-a^x=a^x(a-1)$. Ist nun $a>1$, so wird dies ∞, also ist für $a>1$:

$$G_\infty \frac{a^x}{x} = \infty,$$

d. h. a^x wächst viel rascher als x.

3) Man verlangt den Werth von $\frac{arc(tg=x)}{x}$ für $x=\infty$. Hier ist

$$f(x+1)-f(x)=arc(tg=x+1)-arc(tg=x)=arc\left(tg=\frac{1}{1+x(x+1)}\right).$$

Läßt man x unendlich groß werden, so ist $\frac{1}{1+x(x+1)}$ Null, also $arc\left(tg=\frac{1}{1+x(x+1)}\right)$ ebenfalls Null, folglich

$$G_\infty \frac{arc(tg=x)}{x} = 0,$$

wie leicht einzusehen, da $arc(tg=\infty)=\frac{\pi}{2}$ ist.

VI. Aus dem Satze in IV. leitet sich leicht ein zweiter ab. Setzt man nämlich $f(x)=l.F(x)$, so ist

$$f(x+1)-f(x)=l.F(x+1)-l.F(x)=l.\left(\frac{F(x+1)}{F(x)}\right) \text{ und also}$$

$$G_\infty l.\left(\frac{F(x+1)}{Fx}\right)=G_\infty \frac{lF(x)}{x}=G_\infty l\left(\left(F(x)\right)^{\frac{1}{x}}\right),$$

d. h. offenbar

$$G_\infty \left(\frac{F(x+1)}{F(x)}\right)=G_\infty \left(F(x)\right)^{\frac{1}{x}}.$$

Wendet man diesen Lehrsatz auf die Sätze im sechsten Abschn. V.

und VI. an, so sieht man, daß wenn die Größe $(a_n)^{\frac{1}{n}}$ für unendlich wachsende n sich einer Gränze nähert, die > 1, die Reihe in V. divergent ist; nähert diese Größe dagegen sich einer Zahl < 1, so ist die Reihe in VI. konvergent.

VII. Als Beispiele mögen wieder dienen:

1) $F(x)=x$. Alsdann ist $\frac{F(x+1)}{F(x)}=\frac{x+1}{x}=1+\frac{1}{x}$ und

$$G_\infty\left(1+\frac{1}{x}\right)=1, \text{ also}$$

$$G_\infty\left(x^{\frac{1}{x}}\right)=1,$$

d. h. die Zahlen $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{3}$, $\sqrt[4]{4}$, $\sqrt[5]{5}$, ... nähern sich immer mehr der Einheit.

2) $F(x)=a\,x^n+b\,x^{n-1}+\ldots$; alsdann ist

$$\frac{F(x+1)}{F(x)}=\frac{a\left(1+\frac{1}{x}\right)^n+\frac{b}{x}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{n-1}+\frac{c}{x^2}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{n-2}+\ldots}{a+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}+\ldots\ldots\ldots}$$

Geht man zur Gränze $x=\infty$ über, so ist obige Größe $=\frac{a}{a}=1$, wenn n eine ganze positive Zahl ist. Also ist

$$G_\infty(a\,x^n+b\,x^{n-1}+\ldots)^{\frac{1}{x}}=1.$$

3) $F(x)=l(x)$. Hier ist $\frac{F(x+1)}{F(x)}=\frac{l(x+1)}{l(x)}=$

$$\frac{l(x)+l\left(1+\frac{1}{x}\right)}{l(x)}=1+\frac{l\left(1+\frac{1}{x}\right)}{l(x)}.$$ Läßt man x unendlich groß werden, so ist dies $=1$, also

$$G_\infty\left(l(x)\right)^{\frac{1}{x}}=1.$$

D. h. die Zahlen $\sqrt{l(2)}$, $\sqrt[3]{l(3)}$, $\sqrt[4]{l(4)}$, ... nähern sich immer mehr der Einheit.

4) Sei $F(x)=\frac{1}{x}$. Dann ist $\frac{F(x+1)}{F(x)}=\frac{x}{x+1}=\frac{1}{1+\frac{1}{x}}$ und wenn $x=\infty$, so ist dies $=1$, also

$$G_\infty\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x}}=1,$$

d. h. die Zahlen

$\sqrt{\frac{1}{2}}, \sqrt[3]{\frac{1}{3}}, \sqrt[4]{\frac{1}{4}}, \sqrt[5]{\frac{1}{5}}, \ldots$ nähern sich gleichfalls immer mehr der Einheit.

5) Sei $F(x)=\frac{1}{\log x}$, also $\frac{F(x+1)}{F(x)}=\frac{\log(x)}{\log(x+1)}=$ $\frac{\log(x)}{\log(x)+\log\left(1+\frac{1}{x}\right)}=\frac{1}{1+\frac{\log\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\log x}}$. Geht man zur Gränze über (wenn die Grundzahl des Systems >1), so ist dies 1, also

$$G_\infty\left(\frac{1}{\log x}\right)^{\frac{1}{x}}=1.$$

6) Sei $F(x)=1.2\ldots x$, also $\frac{F(x+1)}{F(x)}=x+1$, und $G_\infty\frac{F(x+1)}{F(x)}=\infty$, also

$$G_\infty(1.2.3\ldots x)^{\frac{1}{x}}=\infty,$$

d. h. die Zahlen

$\sqrt{1.2}, \sqrt[3]{1.2.3}, \sqrt[4]{1.2.3.4}, \ldots$ wachsen unbeschränkt.

7) Sei $F(x)=\frac{1}{1.2.3\ldots x}$, so ist $\frac{F(x+1)}{F(x)}=\frac{1}{x+1}$, woraus

$$G_\infty\left(\frac{1}{1.2\ldots x}\right)^{\frac{1}{x}}=0.$$

8) Sei $F(x)=a^x$, so ist $\frac{F(x+1)}{F(x)}=a$, also

$$G_\infty(a^x)^{\frac{1}{x}}=a.$$

9) Sei $F(x)=a+\frac{1}{b+x}$, so ist $\frac{F(x+1)}{F(x)}=\frac{a+\frac{1}{b+x+1}}{a+\frac{1}{b+x}}$, geht man zur Gränze, so ist dies 1, also

$$G_\infty\left(a+\frac{1}{b+x}\right)^{\frac{1}{x}}=1.$$

VIII. Einige weitere Gränzbestimmungen mögen hier noch folgen.

1) Es sei $G_\infty\varphi(x)=a$, $G_\infty\psi(x)=b$, so handelt es sich um die Bestimmung von $G_\infty\left(\left(\varphi(x)\right)^{\psi(x)}\right)$.

Läßt man x groß genug werden, so wird also $\varphi(x)=a+\alpha$, $\psi(x)=b+\beta$ gesetzt werden dürfen, wenn α und β kleine Größen sind, die verschwinden, wenn $x=\infty$. Also ist jetzt

$$\left(\varphi(x)\right)^{\psi(x)}=(a+\alpha)^{(b+\beta)}=(a+\alpha)^b\cdot(a+\alpha)^\beta=$$

$$a^b\left(1+\frac{\alpha}{a}\right)^b\cdot a^\beta\left(1+\frac{\alpha}{a}\right)^\beta.$$ Da nun $\frac{\alpha}{a}<1$, wenn nicht $a=0$, so ist $\left(1+\frac{\alpha}{a}\right)^b=1+b\frac{\alpha}{a}+\ldots$, $\left(1+\frac{\alpha}{a}\right)^\beta=1+\beta\frac{\alpha}{a}+\ldots$, geht man also zur Gränze über, so ergibt sich

$$G_\infty\left(\varphi(x)\right)^{\psi(x)}=a^b\cdot 1.a^0\cdot 1=a^b=\left(G_\infty\varphi(x)\right)^{G_\infty(\psi(x))}.$$

Für $\varphi(x)=x^{\frac{1}{x}}$, $\psi(x)=\frac{\log x}{x}$ ist also

$$G_\infty\left(x^{\frac{1}{x}}\right)^{\frac{\log x}{x}}=G_\infty\, x^{\frac{\log x}{x^2}}=1.^0=1$$

(nach VII. 1 und V. 1).

2) Es handle sich um die Bestimmung von

$$G_\infty\frac{1^m+2^m+3^m+\ldots+x^m}{x^{m+1}},$$ m ganz und positiv.

Beachtet man das im dreizehnten Abschnitt §. 5, VI. Gesagte, so sieht man ein, daß die Summe $1^m+2^m+\ldots+x^m$ sich durch eine Größe der Form $\frac{x^{m+1}}{m+1}+a\,x^m+b\,x^{m-1}+\ldots$ ausdrücken läßt.

Also ist

$$\frac{1^m+2^m+3^m+\ldots+x^m}{x^{m+1}}=\frac{1}{m+1}+\frac{a}{x}+\frac{b}{x^2}+\ldots.$$

und wenn man zur Gränze $x=\infty$ übergeht:

$$G_\infty \frac{1^m+2^m+3^m+\ldots.+x^m}{x^{m+1}}=\frac{1}{m+1}.$$

Dieser Satz wird bei elementaren Berechnungen von Flächen und Körpern gebraucht.

3) Es handle sich um die Bestimmung der Gränze von $\frac{a^x-1}{x}$ für unendlich abnehmende x.

Es ist $a^x=e^{xl(a)}=1+xl(a)+\frac{(xl(a))^2}{1.2}+\ldots..$ (siebenter Abschnitt), also ist

$$\frac{a^x-1}{x}=\frac{x\,l(a)+\frac{(xl(a))^2}{1.2}+\ldots}{x}=l(a)+\frac{x(l(a))^2}{1.2}+\ldots$$

und folglich

$$G_0\left(\frac{a^x-1}{x}\right)=l(a).$$

4) Sei $G_\infty\, x^a e^{-x}$ zu bestimmen, $a>0$.

$$x^a e^{-x}=\frac{x^a}{e^x}=\frac{x^a}{1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1.2}+\ldots.},$$

ist nun $a<r$, wo r positiv und ganz, so ist also

$$x^a e^{-x}=\frac{1}{\frac{1}{x^a}+\frac{1}{x^{a-1}}+\ldots+\frac{x^{r-a}}{1.2\ldots r}+\frac{x^{r-a+1}}{1.2\ldots r+1}+\ldots}$$

und folglich

$$G_\infty\, x^a e^{-x}=0,\ a>0.$$

5) Es sei $G_0\frac{e^x-e^{-x}}{\sin x}$ zu bestimmen.

$$e^x-e^{-x}=1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1.2}+\ldots-\left(1-\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1.2}+\ldots\right)=$$

$$2\left(\frac{x}{1}+\frac{x^3}{1.2.3}+\ldots\right)$$ (siebenter Abschnitt)

$$\sin x=\frac{x}{1}-\frac{x^3}{1.2.3}+\ldots..$$

also

$$\frac{e^x - e^{-x}}{\sin x} = \frac{2\left(\frac{x}{1} + \frac{x^3}{1.2.3} + \ldots\right)}{\frac{x}{1} - \frac{x^3}{1.2.3} + \ldots} =$$

$$2\frac{\left(1 + \frac{x^2}{1.2.3} + \ldots\right)}{1 - \frac{x^2}{1.2.3} + \ldots}.$$

Geht man zur Gränze 0 über, so findet sich

$$G_0 \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x} = 2.$$

6) Sei $G_0 \dfrac{1-\cos x}{x^2}$ zu bestimmen. Genau in derselben Weise, wie so eben, findet sich:

$$G_0 \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2},$$

eben so

$$G_0 \frac{x - \sin x}{x^3} = \frac{1}{6},$$

$$G_0 \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x} = 2,$$

$$G_0 \frac{\sin n x}{x} = n.$$

7) Sei $G_{\frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{1-\sin x}{1+\sin 3 x}\right)$ zu suchen, d. h. der Werth von

$\dfrac{1-\sin x}{1+\sin 3 x}$ für $x = \dfrac{\pi}{2}$.

Man setze $x = \dfrac{\pi}{2} + y$, so ist $\dfrac{1-\sin x}{1+\sin 3 x} = \dfrac{1-\cos y}{1-\cos 3 y}$, und

$$G_{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1-\sin x}{1+\sin 3 x}\right) = G_0 \frac{1-\cos y}{1-\cos 3y} =$$

$$G_0 \frac{\frac{y^2}{1.2} - \frac{y^4}{1\ldots.4} + \ldots}{\frac{3^2 y^2}{1.2} - \frac{3^4 y^4}{1\ldots.4} + \ldots} = G_0 \left(\frac{\frac{1}{1.2} - \frac{y^2}{1\ldots4} + \ldots}{\frac{9}{1.2} - \frac{3^4 y^2}{1\ldots4} + \ldots}\right) = \frac{1}{9}.$$

8) Sei $G_e\left(\frac{l(x^a)-a}{x-e}\right)$ zu suchen, d. h. der Werth von $\frac{l(x^a)-a}{x-e}$ für $x=e$.

Sei $x=e+y$, so ist $G_e\left(\frac{l(x^a)-a}{x-e}\right)=G_0\left(\frac{l(e+y)^a-a}{y}\right)$

$= G_0\, a.\left(\frac{l(e+y)-1}{y}\right)=G_0\left(a\frac{l(e+y)-l(e)}{y}\right)=$

$G_0\, a\left(\frac{l\left(1+\frac{y}{e}\right)}{y}\right).$

Ist nun $y<e$, was man immer annehmen kann, da ja y zu Null werden soll, so ist

$$l\left(1+\frac{y}{e}\right)=\frac{y}{e}-\frac{1}{2}\left(\frac{y}{e}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{y}{e}\right)^3-\ldots$$

also $G_0\,\frac{l\left(1+\frac{y}{e}\right)}{y}=\frac{1}{e}$, also

$$G_e\left(\frac{l(x^a)-a}{x-e}\right)=\frac{a}{e}.$$

9) Sei $G_e\left(\frac{l(x^a)-a}{x^n-e^n}\right)$ zu suchen. Man findet:

$$G_e\frac{l(x^a)-a}{x^n-e^n}=G_0\, a\frac{l\left(1+\frac{y}{e}\right)}{(e+y)^n-e^n}=$$

$$G_0\left(\frac{a}{e^n}.\frac{l\left(1+\frac{y}{e}\right)}{\left(1+\frac{y}{e}\right)^n-1}\right).$$

Nun ist für $y<e$:

$$\frac{l\left(1+\frac{y}{e}\right)}{\left(1+\frac{y}{e}\right)^n-1}=\frac{\frac{y}{e}-\frac{1}{2}\left(\frac{y}{e}\right)^2+\ldots\ldots\ldots}{n\left(\frac{y}{e}\right)+\frac{n(n-1)}{1.2}\left(\frac{y}{e}\right)^2+\ldots}$$

also

$$G_0 \frac{l\left(1+\frac{y}{e}\right)}{\left(1+\frac{y}{e}\right)^n - 1} = \frac{1}{n}, \text{ also endlich:}$$

$$G_e \frac{l(x^a)-a}{x^n - e^n} = \frac{a}{n\,e^n}.$$

10) Es sei $G_\infty\left(x^n l.\left(\frac{x^n+a}{x^n}\right)\right)$ zu suchen, $n>0$.

$$l.\left(\frac{x^n+a}{x^n}\right) = l.\left(1+\frac{a}{x^n}\right) = \frac{a}{x^n} - \frac{1}{2}\frac{a^2}{x^{2n}} + \ldots$$

also $x^n l\left(\frac{x^n+a}{x^n}\right) = a - \frac{1}{2}\frac{a^2}{x^n} + \ldots$

$$G_\infty\left(x^n l\left(\frac{x^n+a}{x^n}\right)\right) = a.$$

11) Es sei $G_\infty x^{\frac{a}{l(x)}}$ zu suchen.

$$x^{\frac{a}{l(x)}} = \left(e^{l(x)}\right)^{\frac{a}{l(x)}} = e^a, \text{ was auch } x \text{ sei,}$$

also $G_\infty x^{\frac{a}{l(x)}} = e^a.$

12) Es sei $G_\infty \frac{1}{x\,l\left(1+\frac{1}{x}\right)}$ zu suchen.

$$l\left(1+\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2}\frac{1}{x^2} + \ldots,\ x\,l\left(1+\frac{1}{x}\right) =$$
$$1 - \frac{1}{2}\frac{1}{x} + \ldots.$$

$$G_\infty \frac{1}{x\,l\left(1+\frac{1}{x}\right)} = 1.$$

IX. Man sieht aus den letzten Beispielen, in welcher Weise Größen zu behandeln sind, die unter den unbestimmten Formen $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0^0, \frac{1}{0.\infty}, 0.\infty$ u. s. w. erscheinen. Eine allgemeine Vor-

schrift kann hier nicht gegeben werden; im besondern Falle wird man sich nicht schwer zu helfen wissen. Man wird derartige Betrachtungen sehr oft anwenden können. So wenn wir als Beispiel die Formel (2) in §. 5 vorigen Abschnitts wählen und nehmen $\Delta x = 0$, so wird die zweite Seite zu

$$\sin x . G_0 \frac{\sin (n+1)\frac{\Delta x}{2}}{\sin \frac{\Delta x}{2}} = (n+1) \sin x,$$

dasselbe, was die erste Seite wird.

[illegible] alſo endlich:

10) Es ſei $G_\infty\left(x^n l\left(\frac{x^n+a}{x^n}\right)\right)$ [illegible]

$$l\left(\frac{x^n+a}{x^n}\right)=l\left(1+\frac{a}{x^n}\right)=\frac{a}{x^n}-\frac{1}{2}\frac{a^2}{x^{2n}}+\ldots,$$

alſo $x^n l\left(\frac{x^n+a}{x^n}\right)=a-\frac{1}{2}\frac{a^2}{x^n}+\ldots$, alſo

$$G_\infty\left(\ldots\right)=a.$$

11) Es ſei G_∞ [illegible]

$$x^{\frac{a}{l(x)}}=\left(e^{l(x)}\right)^{\frac{a}{l(x)}}=e^a, \text{ was auch } x \text{ ſei,}$$

alſo $G_\infty x^{\frac{a}{l(x)}}=e^a$.

12) Es ſei $G_\infty \frac{1}{x\,l\left(1+\frac{1}{x}\right)}$ zu finden.

$$l\left(1+\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\frac{1}{x^2}+\ldots,\ x\,l\left(1+\frac{1}{x}\right)=1-\frac{1}{2}\frac{1}{x}+\ldots,$$

$$[illegible]\left(\ldots\frac{1}{x}\right)=1.$$

[illegible] Man ſieht aus den [illegible] Beiſpielen, in welcher Weiſe Größen zu [illegible] die unter den unbeſtimmten Formen $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0^0$, [illegible] erſcheinen. Eine allgemeine Vor-

Zweite Abtheilung.

Die Auflösung der algebraischen Gleichungen.

Erster Abschnitt.

Uebersichtliche Betrachtung der Gleichungen des zweiten Grades.

I. Jede quadratische Gleichung kann auf die Form:

$$x^2+a\,x+b=0 \qquad (1)$$

gebracht werden. Daraus zieht man:

$$x^2+a\,x=-b$$

$$x^2+a\,x+\left(\frac{a}{2}\right)^2=\frac{a^2}{4}-b=\frac{a^2-4b}{4}$$

$$\pm\left(x+\frac{a}{2}\right)=\pm\frac{\sqrt{a^2-4b}}{2},$$

so daß anscheinend vier Gleichungen des ersten Grades zum Vorschein kommen:

$$+\left(x+\frac{a}{2}\right)=+\frac{\sqrt{a^2-4b}}{2},$$

$$-\left(x+\frac{a}{2}\right)=+\frac{\sqrt{a^2-4b}}{2},$$

$$+\left(x+\frac{a}{2}\right)=-\frac{\sqrt{a^2-4b}}{2},$$

$$-\left(x+\frac{a}{2}\right)=-\frac{\sqrt{a^2-4b}}{2}.$$

Aber man sieht leicht, daß die erste und vierte, die zweite und

dritte identisch sind, so daß zwei davon Alles umfassen, also etwa die erste und dritte, d. h.

$$x+\frac{a}{2}=\pm\frac{\sqrt{a^2-4b}}{4},$$

$$x=-\frac{a}{2}\pm\frac{\sqrt{a^2-4b}}{2}, \qquad (2)$$

welche Formel die zwei Wurzeln der Gleichung (1) gibt.

II. Heißt die eine Wurzel, $-\frac{a}{2}+\frac{\sqrt{a^2-4b}}{2}$, m; die andere, $-\frac{a}{2}-\frac{\sqrt{a^2-4b}}{2}$, n, so überzeugt man sich leicht, daß

$$m+n=-a,\ mn=b. \qquad (3)$$

so daß die Gleichung (1) auch durch

$$x^2-(m+n)x+mn=0=(x-m)(x-n), \qquad (4)$$

dargestellt werden kann. Damit also die Gleichung (1) erfüllt sei, muß das Produkt $(x-m)(x-n)$ Null werden. Dieses geschieht aber nur dadurch, daß entweder $x-m=0$, oder $x-n=0$. Ist das erste der Fall, so ist $x=m$, beim zweiten $x=n$, d. h. man erhält als Ergebniß, daß die Gleichung (1) die zwei Wurzeln m und n deßwegen hat, weil die erste Seite derselben, nämlich x^2+ax+b, gleich ist einem Produkte zweier Faktoren, die beide vom ersten Grade sind in Bezug auf x.

Zugleich ist hiemit folgende Aufgabe gelöst:

Die Gleichung des zweiten Grades zu finden, für welche die Summe der Wurzeln k, das Produkt derselben h ist. Die Gleichung ist nämlich $x^2-kx+h=0$.

III. Achtet man weiter auf die Formen (2), so sieht man, daß wenn

$a^2>4b$, beide Wurzeln reell sind,

$a^2=4b$, „ „ gleich groß sind, jede $-\frac{a}{2}$.

$a^2<4b$, „ „ imaginär sind.

Im zweiten Falle, nämlich wenn $a^2=4b$, $m=n=-\frac{a}{2}$, ist:

$$x^2+ax+b=(x-m)(x-n)=\left(x+\frac{a}{2}\right)\left(x+\frac{a}{2}\right)=\left(x+\frac{a}{2}\right)^2.$$

Im dritten Falle, nämlich wenn $a^2 < 4b$, ist:

$$-\frac{a}{2} \pm \frac{\sqrt{a^2-4b}}{2} = r(\cos\alpha \pm i \sin\alpha) = -\frac{a}{2} \pm \frac{\sqrt{4b-a^2}}{2} i$$

und $r = \frac{1}{2}\sqrt{a^2+4b-a^2} = \sqrt{b}$, $\cos\alpha = \frac{-a}{2\sqrt{b}}$, $\sin\alpha = \frac{\sqrt{4b-a^2}}{2\sqrt{b}}$.

Zweiter Abschnitt.

Auflösung der Gleichungen des dritten Grades.

I. Sei

$$x^3 + ax + b = 0 \qquad (1)$$

die vorgelegte Gleichung des dritten Grades. Man setze $x = y + z$, worin y und z zwei noch unbekannte Zahlen sind, so wird die (1) zu

$$y^3 + 3y^2z + 3yz^2 + z^3 + a(y+z) + b = 0$$

d. h.

$$y^3 + z^3 + b + 3yz(y+z) + a(y+z) = 0$$

oder

$$y^3 + z^3 + b + (3yz + a)(y+z) = 0. \qquad (2)$$

Bestimmt man nun y und z so, daß

$$\left.\begin{aligned} y^3 + z^3 + b &= 0 \\ 3yz + a &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

so wird der Gleichung (2), d. h. der Gleichung (1) Genüge geleistet.

Aus der zweiten Gleichung (3) folgt

$$z = -\frac{a}{3y},$$

und setzt man diesen Werth von z in die erste (3), so folgt:

$$y^3 - \frac{a^3}{27y^3} + b = 0, \text{ d. h. } y^6 - \frac{a^3}{27} + by^3 = 0.$$

Sei nun $y^3 = u$, also $y^6 = u^2$, so ist mithin

$$u^2 - \frac{a^3}{27} + bu = 0, \text{ d. h. } u^2 + bu = \frac{a^3}{27}.$$

Daraus folgt, wie im ersten Abschnitt:

$$u = -\frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}}$$

also da $y = \sqrt[3]{u}$:

$$y = \sqrt[3]{-\frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}}}. \quad (4)$$

Aus der ersten Gleichung (3) folgt: $z^3 = -b - y^3 = -b - u$, d. h.

$$z^3 = -b + \frac{b}{2} \mp \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}} = -\frac{b}{2} \mp \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}},$$

$$z = \sqrt[3]{-\frac{b}{2} \mp \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}}}. \quad (5)$$

In den Gleichungen (4) und (5) entsprechen sich die Zeichen, d. h. wenn in (4) das obere gilt, so gilt es auch in (5) und umgekehrt. Nun ist $x = y + z$, d. h.

$$x = \sqrt[3]{-\frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{b}{2} \mp \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}}}.$$

Daraus folgen, dem Anscheine nach, zwei Werthe von x, nämlich:

$$\sqrt[3]{-\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}}} \text{ und}$$

$$\sqrt[3]{-\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}}},$$

die aber offenbar zusammenfallen, so daß man setzen darf:

$$x = y + z = \sqrt[3]{-\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}}}. \quad (6)$$

Setzt man $\sqrt[3]{-\frac{b}{2}+\sqrt{\frac{b^2}{4}+\frac{a^3}{27}}}=m$, $\sqrt[3]{-\frac{b}{2}-\sqrt{\frac{b^2}{4}+\frac{a^3}{27}}}=n$,

so ist also $x=m+n$; $y=m$ oder n und dann $z=n$ oder m. In beiden Fällen sieht man aus (3), daß

$$m^3+n^3+b=0,\ b=-m^3-n^3,$$
$$3mn+a,\ a=-3mn, \qquad (7)$$

ist. Man wird also statt der Gleichung (1) auch schreiben dürfen:

$$x^3-3mnx-m^3-n^3=0, \qquad (8)$$

was man übrigens auch leicht unmittelbar nachweisen kann. Dividirt man die Größe:

$x^3-3mnx-m^3-n^3$ durch $x-m-n$:

$$\begin{array}{l|l} x^3-3mnx-m^3-n^3 & x-(m+n) \\ \underline{x^3-(m+n)x^2} & x^2+(m+n)x+m^2-mn+n^2 \\ (m+n)x^2-3mnx-m^3-n^3 & \\ \underline{(m+n)x^2-(m+n)^2x} & \\ (m^2-mn+n^2)x-m^3-n^3 & \\ \underline{(m^2-mn+n^2)x^2-m^3-n^3} & \\ 0 & \end{array}$$

so erhält man $x^3-3mnx-m^3-n^3=(x-m-n)$
$$\left[x^2+(m+n)x+m^2-mn+n^2\right].$$

Statt der Gleichung (1) kann man also auch schreiben:

$$(x-m-n)\left[x^2+(m+n)x+m^2-mn+n^2\right]=0.$$

Diese Gleichung wird erfüllt, wenn

$$x-m-n=0, \text{ oder } x^2+(m+n)x+m^2-mn+n^2=0.$$

Die erste dieser Gleichungen gibt $x=m+n$, was aber nichts Anderes ist, als eben die Gleichung (6).

Die zweite wird zwei weitere Werthe von x, also zwei weitere Wurzeln der Gleichung (1) geben. Löst man sie auf, so erhält man:

$$x^2+(m+n)x=-m^2+mn-n^2,$$
$$x^2+(m+n)x+\left(\frac{m+n}{2}\right)^2=-m^2+mn-n^2+$$
$$\frac{m^2+2mn+n^2}{4}=-\frac{3}{4}(m^2-2mn+n^2)=-\frac{3}{4}(m-n)^2,$$
$$x+\frac{m+n}{2}=\pm\frac{m-n}{2}\sqrt{-3},$$
$$x=-\frac{m+n}{2}\pm\frac{m-n}{2}\sqrt{-3}.$$

Daraus ergibt sich nun folgende Lösung der Gleichung (1):

Ist $m=\sqrt[3]{-\frac{b}{2}+\sqrt{\frac{b^2}{4}+\frac{a^3}{27}}}$, $n=\sqrt[3]{-\frac{b}{2}-\sqrt{\frac{b^2}{4}+\frac{a^3}{27}}}$, so sind

$$m+n,\ -\frac{m+n}{2}+\frac{m-n}{2}\sqrt{-3},\ -\frac{m+n}{2}-\frac{m-n}{2}\sqrt{-3}$$

die drei Wurzeln der Gleichung $x^3+a\,x+b=0$.

II. Wir untersuchen nun die so eben gefundenen Wurzeln etwas genauer.

1) Sei

$$\frac{b^2}{4}+\frac{a^3}{27} \text{ positiv, d. h. } \frac{b^2}{4}+\frac{a^3}{27}>0,$$

so ist $\sqrt{\frac{b^2}{4}+\frac{a^3}{27}}$ reell, also m und n reell, folglich

$-\frac{m+n}{2}\pm\frac{m-n}{2}\sqrt{-3}=-\frac{m+n}{2}\pm\frac{(m-n)\sqrt{3}}{2}\,i$ imaginär. In diesem Falle hat die Gleichung nur eine reelle und zwei imaginäre Wurzeln. Die letztern sind $-\frac{m+n}{2}\pm\frac{(m-n)\sqrt{3}}{2}i=r(\cos\alpha\pm i\sin\alpha)$,

wo $r=\sqrt{\frac{m^2+n^2}{2}}$, $\cos\alpha=\frac{-(m+n)}{2r}$, $\sin\alpha=\frac{m-n}{2r}$.

2) Sei $\frac{b^2}{4}+\frac{a^3}{27}=0$,

so ist $m=n=\sqrt[3]{-\frac{b}{2}}$, also $m+n=-2\sqrt[3]{\frac{b}{2}}$; die zwei andern Wurzeln sind gleich und zwar jede: $-\frac{m+n}{2}=-\sqrt[3]{-\frac{b}{2}}=\sqrt[3]{\frac{b}{2}}$.

In diesem Falle hat also die Gleichung (1) zwei gleiche Wurzeln, jede $\sqrt[3]{\frac{b}{2}}$, und eine $=-2\sqrt[3]{\frac{b}{2}}$.

3) Sei $\frac{b^2}{4}+\frac{a^3}{27}$ negativ, so ist $\sqrt{\frac{b^2}{4}+\frac{a^3}{27}}$ imaginär $=$ $\sqrt{-\left(\frac{b^2}{4}+\frac{a^3}{27}\right)}\cdot i$, also ist

$$m=\sqrt[3]{-\frac{b}{2}+\sqrt{-\left(\frac{b^2}{4}+\frac{a^3}{27}\right)}\,i},$$

$$n=\sqrt[3]{-\frac{b}{2}-\sqrt{-\left(\frac{b^2}{4}-\frac{a^3}{27}\right)}\,i}.$$

Sei nun

$$-\frac{b}{2}\pm\sqrt{-\left(\frac{b^2}{4}+\frac{a^3}{27}\right)}\,i=r(\cos\alpha\pm i\sin\alpha),$$

so ist

$$r=\sqrt{\frac{b^2}{4}-\frac{b^2}{4}-\frac{a^3}{27}}=\sqrt{-\frac{a^3}{27}},\ \cos\alpha=-\frac{b}{2r},\ \sin\alpha=\frac{\sqrt{-\left(\frac{b^2}{4}+\frac{a^3}{27}\right)}}{r},$$

also

$$m=\sqrt[3]{-\frac{b}{2}+\sqrt{-\left(\frac{b^2}{4}+\frac{a^3}{27}\right)}\,i}=\sqrt[3]{r(\cos\alpha+i\sin\alpha)}=$$
$$r^{\frac{1}{3}}\left(\cos\frac{\alpha}{3}+i\sin\frac{\alpha}{3}\right),$$

$$n=\sqrt[3]{-\frac{b}{2}-\sqrt{-\left(\frac{b^2}{4}+\frac{a^3}{27}\right)}\,i}=$$
$$\sqrt[3]{r(\cos(-\alpha)+i\sin(-\alpha))}=$$
$$r^{\frac{1}{3}}\left(\cos\left(-\frac{\alpha}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\alpha}{3}\right)\right)=r^{\frac{1}{3}}\left(\cos\frac{\alpha}{3}-i\sin\frac{\alpha}{3}\right).\ ^{*})$$

Demnach

---

*) Man überzeugt sich von der Richtigkeit dieser Sätze einfach dadurch, daß man nach Seite 10, Formel (2), findet $\left[r^{\frac{1}{3}}\left(\cos\frac{\alpha}{3}\pm i\sin\frac{\alpha}{3}\right)\right]^3=r(\cos\alpha\pm i\sin\alpha)$. Zugleich genügen diese Werthe von m und n den Gleichungen (3), indem $m^3+n^3=2r\cos\alpha=-b$, also $m^3+n^3+b=0$; $m\,n=r^{\frac{1}{3}}\left[\cos\frac{\alpha}{3}+i\sin\frac{\alpha}{3}\right].\ r^{\frac{1}{3}}\left[\cos\frac{\alpha}{3}-i\sin\frac{\alpha}{3}\right]=r^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{r^2}=\sqrt[3]{-\frac{a^3}{27}}=-\frac{a}{3}$, also $3m\,n+a=0$. Folglich sind wir berechtigt, die angeführten Werthe ohne Weiteres für y und z zu setzen.

$$m+n=2\,r^{\frac{1}{3}}\cos\frac{\alpha}{3},\ m-n=2r^{\frac{1}{3}}\,i\sin\frac{\alpha}{3},\ \text{mithin}$$

$$(m-n)i=-2\,r^{\frac{1}{3}}\sin\frac{\alpha}{3}.$$

Also sind die drei Wurzeln:

$$2\,r^{\frac{1}{3}}\cos\frac{\alpha}{3},\ -r^{\frac{1}{3}}\cos\frac{\alpha}{3}-r^{\frac{1}{3}}\sin\frac{\alpha}{3}.\sqrt{3},\ -r^{\frac{1}{3}}\cos\frac{\alpha}{3}+$$
$$r^{\frac{1}{3}}\sin\frac{\alpha}{3}\sqrt{3}.$$

Die zwei letztern lassen noch eine Umformung zu, da nämlich $\cos 60^0=\frac{1}{2}, \sin 60^0=\frac{\sqrt{3}}{2}$, so kann man statt der zwei letztern schreiben:

$$-2r^{\frac{1}{3}}\left(\cos\frac{\alpha}{3}\cos 60^0+\sin\frac{\alpha}{3}\sin 60^0\right)=$$
$$-2r^{\frac{1}{3}}\cos\left(\frac{\alpha}{3}-60^0\right),$$

und
$$-2r^{\frac{1}{3}}\left(\cos\frac{\alpha}{3}\cos 60^0-\sin\frac{\alpha}{3}\sin 60^0\right)=$$
$$-2r^{\frac{1}{3}}\cos\left(\frac{\alpha}{3}+60^0\right).$$

Daraus folgt also, daß, wenn $\frac{b^2}{4}+\frac{a^3}{27}$ negativ ist, man drei reelle Wurzeln:

$$2\,r^{\frac{1}{3}}\cos\frac{\alpha}{3},\ -2r^{\frac{1}{3}}\cos\left(\frac{\alpha}{3}-60^0\right),\ -2r^{\frac{1}{3}}\cos\left(\frac{\alpha}{3}+60^0\right)$$

hat, wobei $r=\sqrt{-\frac{a^3}{27}}$, $\cos\alpha=-\frac{b}{2r}$, $\sin\alpha=\frac{\sqrt{-\left(\frac{b^2}{4}+\frac{a^3}{27}\right)}}{r}$

III. Hat man die Gleichung

$$x^3+hx^2+kx+l=0,$$

und setzt darin $x=z-\frac{h}{3}$, so erhält man die Gleichung

$$z^3+\left(k-\frac{h^2}{3}\right)z+l-\frac{hk}{3}+\frac{2h^3}{27}=0.$$

Diese Gleichung wird nun nach Art derer in I. und II. aufgelöst, indem man (1) erhält, wenn $a=k-\frac{h^2}{3}$, $b=l-\frac{hk}{3}+\frac{2h^3}{27}$ ist.

Sodann ist $x=z-\frac{h}{3}$.

IV. Beispiele:

1) Die Gleichung $x^3-9x^2+26x-24=0$ aufzulösen.

Sei $x=z+3$, so wird die Gleichung zu $z^3-z=z(z^2-1)=0$. Demnach ist eine Wurzel dieser letztern 0, die andern sind ± 1, und mithin, da $x=z+3$, sind $0+3=3$, $1+3=4$, $-1+3=2$ die drei Wurzeln der vorgelegten Gleichung.

2) Die drei Wurzeln der Gleichung $x^3-15x^2+71x-297=0$ zu finden.

Sei $x=z+5$, so wird man erhalten: $z^3-4z-192=0$. Hier nun ist $a=-4$, $b=-192$, also $\frac{b^2}{4}+\frac{a^3}{27}=9213\frac{17}{27}=\frac{248768}{27}$, also tritt hier der erste Fall in II. ein, d. h. die Gleichung hat nur eine reelle Wurzel. Dieselbe ist

$$\sqrt[3]{96+\sqrt{\frac{248768}{27}}}+\sqrt[3]{96-\sqrt{\frac{248768}{27}}}=6,$$

also ist die eine reelle Wurzel der vorgelegten Gleichung $=11$.

Was die zwei andern (imaginären) Wurzeln der vorgelegten Gleichung anbelangt, so erhält man sie, wenn man zunächst die Gleichung $z^3-4z-192=0$ berücksichtigt, wobei

$$m=\sqrt[3]{96+\sqrt{96^2-\frac{64}{27}}}=5{\cdot}768,$$

$$n=\sqrt[3]{96-\sqrt{96^2-\frac{64}{27}}}=0{\cdot}231$$

also $\frac{m+n}{2}=3$, $\frac{m-n}{2}=2{\cdot}783$, $\frac{m-n}{2}\sqrt{3}=4{\cdot}7958$, demnach die zwei andern Wurzeln:

$$z=-3\pm 4{\cdot}7958i$$

und also endlich die drei Wurzeln der vorgelegten Gleichung:

$$11;\ 2\pm 4{\cdot}7958i.$$

3) Ein senkrechter Kegel soll 40 Kubikfuß Inhalt und 100 Quadratfuß als Fläche des Mantels haben. Welches ist sein Halbmesser und seine Höhe?

Der Halbmesser sei x, die Höhe y, so hat man:

$$\frac{x^2\pi y}{3}=40,\ \frac{2x\pi\sqrt{x^2+y^2}}{2}=100,$$

also $y=\frac{120}{x^2\pi}$, $x^2\pi^2(x^2+y^2)=10000$, $x^2\pi^2\left(x^2+\frac{120^2}{x^4\pi^2}\right)=100^2$,

woraus $x^6-\left(\frac{100}{\pi}\right)^2x^2+\left(\frac{120}{\pi}\right)^2=0.$

Diese Gleichung, anscheinend von höherm Grade, wird auf eine Gleichung des dritten Grades gebracht, wenn man $x^2=z$ setzt, wodurch man erhält:

$$z^3-\left(\frac{100}{\pi}\right)z+\left(\frac{120}{\pi}\right)^2=0.$$

Hier ist nun $a=-\left(\frac{100}{\pi}\right)^2$, $b=\left(\frac{120}{\pi}\right)^2$; $\frac{b^2}{4}+\frac{a^3}{27}=\frac{1}{4}\left(\frac{120}{\pi}\right)^4-\frac{1}{27}\left(\frac{100}{\pi}\right)^6$ negativ, also sind alle drei Werthe von z reell, d. h. es tritt der dritte Fall in II. ein.

Nun ist $r=\sqrt{\frac{1}{27}\left(\frac{100}{\pi}\right)^6}=\left(\frac{100}{\pi}\right)^3\sqrt{\frac{1}{27}}=\frac{1.100^3}{3\sqrt{3}.\pi^3}$,

$r^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{\left(\frac{100}{\pi}\right)^3\sqrt{\frac{1}{27}}}=\frac{100}{\pi\sqrt{3}}$, $2r^{\frac{1}{3}}=\frac{200}{\pi\sqrt{3}}=36{\cdot}7552$,

$$\cos\alpha=-\frac{\left(\frac{120}{\pi}\right)^2}{2r}=-\frac{120^2}{2\pi^2}\cdot\frac{\pi^3\sqrt{27}}{100^3}=-\frac{1{\cdot}2^2\pi\sqrt{27}}{200},$$

$\alpha=96^0 45'$, $\frac{\alpha}{3}=32^0 15'$.

Also sind die drei Werthe von z:

$36{\cdot}7552.\cos 32^0 15'=31{\cdot}085$; $-36{\cdot}7552.\cos(-27^0 45')$
$=-36{\cdot}7552\cos 27^0 45'=-32{\cdot}528$; $-36{\cdot}7552.\cos 92^0 15'$
$=36{\cdot}7552.\cos 87^0 45'=1{\cdot}4430.$

Die Gleichung in z, nämlich $z^3-\left(\frac{100}{\pi}\right)^2z+\left(\frac{120}{\pi}\right)^2=0$ hat also zwei positive und eine negative Wurzel.

Die entsprechenden Werthe von $x=\pm\sqrt{z}$ sind, wenn man nur die positiven, als allein zulässig, beachtet:

$$\sqrt{31{\cdot}085}=5{\cdot}57539,\ \sqrt{1{\cdot}4430}=1{\cdot}20125.$$

Der dritte Werth $\sqrt{-32{\cdot}528}$ ist, da er imaginär, hier nicht weiter zu beachten. Die zu obigen zwei Werthen von x gehörigen Werthe von y sind:

$$\frac{120}{5{\cdot}57539^2\pi}=1{\cdot}2288 \text{ und } \frac{120}{1{\cdot}20125^2\pi}=26{\cdot}4706.$$

Es gibt also zwei Kegel, die der Aufgabe genügen. Der Halbmesser des einen ist 5·5754 Fuß, seine Höhe 1·2288 Fuß; der Halbmesser des andern 1·20125 Fuß, seine Höhe 26·4706 Fuß.

V. Man hat aus dem letzten Beispiele ersehen, daß oft scheinbar andere Formen auf den dritten Grad zurückgeführt werden können. Im Allgemeinen wird die Gleichung:

$$x^{3m}+hx^{2m}+kx^m+l=0$$

auf eine Gleichung des dritten Grades gebracht werden können, wenn man $x^m=z$ setzt.

Endlich kann jede Gleichung des dritten Grades auf die in III. angegebene Form gebracht werden.

So folgt z. B. aus

$$5x(x^2-4)+8x^2=9(x+1)^2-12x$$

offenbar: $5x^3-x^2-26x-9=0$

oder $$x^3-\frac{1}{5}x^2-\frac{26}{5}x-\frac{9}{5}=0,$$

was eben jene Form in III. ist.

VI. Sind p, q, r die drei (reellen oder imaginären) Wurzeln der Gleichung

$$x^3+ax^2+bx+c=0, \qquad (9)$$

so muß also z. B.

$$p^3+ap^2+bp+c=0,\ c=-(p^3+ap^2+bp) \qquad (10)$$

sein, und wenn man diesen Werth von c in die vorige Gleichung setzt, so erhält man

$$x^3-p^3+a(x^2-p^2)+b(x-p)=0, \qquad (11)$$

was nichts Anderes ist, als die Gleichung (9). Da aber

$$\frac{x^3-p^3}{x-p}=x^2+px+p^2,\ \frac{x^2-p^2}{x-p}=x+p,\ \frac{x-p}{x-p}=1,$$

so läßt sich also die erste Seite der Gleichung (11), d. h. der Gleichung (9) durch $x-p$ theilen, d. h. man kann statt der Gleichung (9) setzen:

$$(x-p)(x^2+Ax+B)=0, \qquad (12)$$

wie dies schon in I. geschehen ist. q und r sind nun die Wurzeln der Gleichung

$$x^2+Ax+B=0$$

und folglich ist, nach dem im ersten Abschnitt Gesagten:

$$x^2+Ax+B=(x-q)(x-r),$$

d. h. endlich die Gleichung (9) ist:

$$(x-p)(x-q)(x-r)=x^3+ax^2+bx+c=0.$$

Daraus folgt, wenn man vergleicht:

$$p+q+r=-a,\ pq+pr+qr=b,\ pqr=-c. \quad (13)$$

Es ist deshalb nicht schwer, die Gleichung dritten Grades zu bilden, deren Wurzeln p, q, r sind.

Sie ist immer:

$$x^3-(p+q+r)x^2+(pq+pr+qr)x-pqr=0. \quad (14)$$

Dritter Abschnitt.

Auflösung der Gleichungen des vierten Grades.

I. Seien p, q, r die drei Wurzeln der Gleichung

$$z^3-fz^2+gz-h=0, \quad (1),$$ h positiv,

so hat man, nach Dem, was wir so eben in VI. des vorigen Abschnitts gesehen:

$$p+q+r=f,\ pq+qr+pr=g,\ pqr=h.$$

Man setze nun

$$x=\sqrt{p}+\sqrt{q}+\sqrt{r}, \quad (2)$$

indem man in (2) der Quadratwurzel ihr doppeltes Vorzeichen beidenkt, und zwar jeder unabhängig von den andern, so daß (2) folgende acht Formen umfaßt:

$$+\sqrt{p}+\sqrt{q}+\sqrt{r},\ \sqrt{p}+\sqrt{q}-\sqrt{r},$$
$$+\sqrt{p}-\sqrt{q}-\sqrt{r},\ \sqrt{p}-\sqrt{q}+\sqrt{r},$$
$$-\sqrt{p}-\sqrt{q}+\sqrt{r},\ -\sqrt{p}+\sqrt{q}+\sqrt{r},$$
$$-\sqrt{p}+\sqrt{q}-\sqrt{r},\ -\sqrt{p}-\sqrt{q}-\sqrt{r}, \quad (3)$$

daß also in (2) jede der Quadratwurzeln $\sqrt{p}$, $\sqrt{q}$, $\sqrt{r}$ nach Belieben positiv oder negativ sein kann. Aus (2) folgt:

$$x^2 = p+q+r+2(\sqrt{p}.\sqrt{q}+\sqrt{p}.\sqrt{r}+\sqrt{q}.\sqrt{r}) =$$
$$f+2(\sqrt{p}.\sqrt{q}+\sqrt{p}.\sqrt{r}+\sqrt{q}.\sqrt{r}),$$

da p, q, r nur eindeutig sind; jede der noch vorkommenden Quadratwurzeln ist mit dem ihr in (2) beigelegten Vorzeichen zu nehmen. Hieraus ergibt sich:

$$x^2 - f = 2(\sqrt{p}.\sqrt{q}+\sqrt{p}.\sqrt{r}+\sqrt{q}.\sqrt{r}),$$

und wenn man nochmals quadrirt:

$$x^4 - 2fx^2 + f^2 = 4(pq+pr+qr)+8\sqrt{p}.\sqrt{q}.\sqrt{r}(\sqrt{p}+\sqrt{q}+\sqrt{r})$$
$$= 4g+8.\sqrt{p}.\sqrt{q}.\sqrt{r}(\sqrt{p}+\sqrt{q}+\sqrt{r})$$
$$= 4g+8\sqrt{p}.\sqrt{q}.\sqrt{r}.x,$$

worin abermals jede Quadratwurzel mit dem ihr in (2) beigedachten Zeichen zu nehmen ist.

Man zieht aus dem Obigen:

$$x^4 - 2fx^2 - 8\sqrt{p}.\sqrt{q}.\sqrt{r}.x + f^2 - 4g = 0. \quad (4)$$

Sind nun die Vorzeichen von $\sqrt{p}$, $\sqrt{q}$, $\sqrt{r}$ in (2) so gewählt, daß das Produkt $\sqrt{p}.\sqrt{q}.\sqrt{r}$ positiv ist, d. h. hat man eine der vier ersten Gruppen in (3) (nämlich: $\sqrt{p}+\sqrt{q}+\sqrt{r}$, oder $\sqrt{p}-\sqrt{q}-\sqrt{r}$, oder $-\sqrt{p}-\sqrt{q}+\sqrt{r}$, oder $-\sqrt{p}+\sqrt{q}+\sqrt{r}$) gewählt, so ist offenbar

$$\sqrt{p}.\sqrt{q}.\sqrt{r} = +\sqrt{pqr} = +\sqrt{h},$$

und die Gleichung (4) heißt:

$$x^4 - 2fx^2 - 8\sqrt{h}x + f^2 - 4g = 0, \quad (5)$$

deren vier Wurzeln also unstreitig

$$+\sqrt{p}+\sqrt{q}+\sqrt{r},\ \sqrt{p}-\sqrt{q}-\sqrt{r},\ -\sqrt{p}-\sqrt{q}+\sqrt{r},$$
$$-\sqrt{p}+\sqrt{q}-\sqrt{r}, \quad (6)$$

sind. Hat man aber eine der andern vier Gruppen in (3) gewählt, so ist

$$\sqrt{p}.\sqrt{q}.\sqrt{r} = -\sqrt{pqr} = -\sqrt{h},$$

so daß jetzt die Gleichung (4) heißt:

$$x^4 - 2fx^2 + 8\sqrt{h}.x + f^2 - 4g = 0, \quad (7)$$

deren Wurzeln nun

$$\sqrt{p}+\sqrt{q}-\sqrt{r},\ \sqrt{p}-\sqrt{q}+\sqrt{r},\ -\sqrt{p}+\sqrt{q}+\sqrt{r},$$
$$-\sqrt{p}-\sqrt{q}-\sqrt{r}, \quad (8)$$

sind.

II. Gesetzt nun, es sei die Gleichung vierten Grades

$$x^4 + ax^2 + bx + c = 0, \quad (9)$$

zur Lösung vorgelegt. Diese Gleichung läßt sich mit (5) vergleichen,

wenn b negativ ist, mit (7), wenn b positiv ist. Man muß also zwei Fälle unterscheiden, je nachdem b positiv oder negativ ist.

a) Sei b eine positive Zahl, a und c aber nach Belieben positiv oder negativ.

Alsdann vergleiche man (9) mit (7) und setze zu diesem Zwecke:

$$-2f=a,\ 8\sqrt{h}=b,\ f^2-4g=c,$$

so findet sich:

$$f=-\frac{1}{2}a,\ h=\frac{b^2}{64},\ g=\frac{1}{16}a^2-\frac{1}{4}c.$$

Vergleicht man nun das in I. Gesagte hiemit, so ergibt sich, daß wenn in diesem Falle p, q, r die drei Wurzeln der Gleichung

$$z^3+\frac{1}{2}az^2+\left(\frac{1}{16}a^2-\frac{1}{4}c\right)z-\frac{b^2}{64}=0, \qquad (10)$$

sind, die vier Wurzeln der Gleichung (9) sein werden:

$$+\sqrt{p}+\sqrt{q}-\sqrt{r},\ +\sqrt{p}-\sqrt{q}+\sqrt{r},\ -\sqrt{p}+\sqrt{q}+\sqrt{r},$$
$$-\sqrt{p}-\sqrt{q}-\sqrt{r}. \qquad (11)$$

b) Sei b eine negative Zahl, a und c nach Belieben positiv oder negativ.

Alsdann vergleicht man (9) mit (5) und erhält:

$$-2f=a,\ -8\sqrt{h}=b,\ f^2-4g=c.$$

Daraus folgt

$$f=-\frac{1}{2}a,\ h=\frac{b^2}{64},\ g=\frac{1}{16}a^2-\frac{1}{4}c.$$

Sind also wieder p, q, r die drei Wurzeln der Gleichung (10), so sind in diesem Falle die vier Wurzeln der Gleichung (9):

$$+\sqrt{p}+\sqrt{q}+\sqrt{r},\ +\sqrt{p}-\sqrt{q}-\sqrt{r},\ -\sqrt{p}-\sqrt{q}+\sqrt{r},$$
$$-\sqrt{p}+\sqrt{q}-\sqrt{r}. \qquad (12)$$

Sind zwei der Größen p, q, r imaginär, so verfährt man mit denselben in (11) und (12) nach dem in der ersten Abtheilung Gezeigten, indem man aber immer die Quadratwurzel eindeutig wählt, wie es eben die Formen (11) oder (12) verlangen.

III. Ein Beispiel mag das Obige erläutern.

Sei die Gleichung

$$x^4-25x^2+60x-36=0,$$

aufzulösen. Hier ist in (9):

$$a=-25,\ b=+60,\ c=-36,$$

also tritt in II. der erste Fall ein. Die Gleichung (10) findet sich:

$$z^3-\frac{25}{2}z^2+\frac{769}{16}z-\frac{225}{4}=0,$$

deren drei Wurzeln sind: $p=\frac{9}{4},\ q=4,\ r=\frac{25}{2}$.

Also sind die vier Wurzeln der vorgelegten Gleichung:

$$\sqrt{\frac{9}{4}}+\sqrt{4}-\sqrt{\frac{25}{4}}=1,\ \sqrt{\frac{9}{4}}-\sqrt{4}+\sqrt{\frac{25}{4}}=2,$$

$$-\sqrt{\frac{9}{4}}+\sqrt{4}+\sqrt{\frac{25}{4}}=3,\ -\sqrt{\frac{9}{4}}-\sqrt{4}-\sqrt{\frac{25}{4}}=-6.$$

Sei ferner die Gleichung

$$x^4-45x^2-40x+84=0$$

gegeben. $a=-45$, $b=-40$, $c=84$, also tritt der zweite Fall ein. Die kubische Gleichung ist:

$$z^3-\frac{45}{2}z^2+\frac{1689}{16}z-25=0,$$

deren drei Wurzeln 16, 0·25, 6·25 sind. Also sind die vier Wurzeln der vorgelegten Gleichung:

$$\sqrt{16}+\sqrt{0{\cdot}25}+\sqrt{6{\cdot}25}=7,\ \sqrt{16}-\sqrt{0{\cdot}25}-\sqrt{6{\cdot}25}=1,$$
$$-\sqrt{16}+\sqrt{0{\cdot}25}-\sqrt{6{\cdot}25}=-6,\ -\sqrt{16}-\sqrt{0{\cdot}25}+\sqrt{6{\cdot}25}=-2.$$

IV. Hat man allgemein die Gleichung

$$x^4+m\,x^3+n\,x^2+l\,x+k=0,$$

so wird man sie immer auf die Form der Gleichung (9) bringen, wenn man

$$x=z-\frac{m}{4}$$

setzt, so daß man dann auch diese Gleichung auflösen kann.

Weiteres fügen wir hier nicht mehr bei, da in den folgenden Untersuchungen diese Gleichungen ebenfalls mit enthalten sind.

Vierter Abschnitt.

Allgemeine Betrachtungen über die algebraischen Gleichungen.

§. 1.

Ein Ausdruck

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots\ldots+a_n,\qquad (1)$$

in welchem n eine ganze positive Zahl ist, a_0, a_1, ... a_n reell sind, ist eine **stetige Funktion** von x, d. h. er ändert sich nur um eine verschwindend kleine Größe, wenn x sich um eben eine solche ändert.

Zunächst behaupte ich, daß in der Größe

$$b_1 u + b_2 u^2 + \dots + b_n u^n, \qquad (2)$$

u immer so klein gewählt werden kann, daß (2) kleiner ist als jede auch noch so kleine Zahl β. Denn sei b_r die größte der Zahlen b_1, b_2, ... b_n, wenn man auf das Vorzeichen nicht achtet, so daß etwa 15 die größte unter den Zahlen 2, 12, 3, —9, —15, —7 wäre, so ist jedenfalls, wieder ohne Rücksicht auf das Vorzeichen, d. h. wenn man alle Glieder positiv genommen denkt:

$$b_1 u + b_2 u^2 + \dots + b_n u^n \leqq b_r (u + u^2 + \dots + u^n)$$

$$\text{d. h.} \leqq b_r \frac{u - u^{n+1}}{1 - u}.$$

Ist nun $u < 1$, so ist $\frac{u - u^{n+1}}{u - u} = \frac{u}{1-u} - \frac{u^{n+1}}{1-u} < \frac{u}{1-u}$, also jedenfalls

$$b_1 u + b_2 u^2 + \dots + b_n u^n < \frac{b_r u}{1-u}.$$

Macht man also $\frac{b_r u}{1-u} = \beta$, d. h. $u = \frac{\beta}{\beta + b_r}$, so ist alsdann

$$b_1 u + b_2 u^2 + \dots + b_n u^n < \beta.$$

Sind in dem Ausdrucke (2) auch Glieder mit negativem Zeichen, so sieht man leicht ein, daß die Summe aller Glieder keine größere Zahl (abgesehen davon, ob sie positiv oder negativ sei) sein kann, als die Summe, die man erhielte, wenn man alle Glieder positiv nähme, so daß der Satz für diesen Fall um so mehr gilt.

Läßt man nun in (1) x zu $x + \alpha$ werden, so erhält man, wie man leicht einsieht:

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n + \alpha P_1 + \alpha^2 P_2 + \dots + \alpha^n P_n,$$

wo nun $\alpha P_1 + \alpha^2 P_2 + \dots + \alpha^n P_n$ die Zunahme von (1) ist.

Allein nach dem so eben erwiesenen Satze kann α immer so gewählt werden, daß diese Zunahme so klein sei, als man nur will, wodurch nun die obige Behauptung gerechtfertigt ist.

§. 2.

Wenn in dem Ausdrucke

$$a_r u^r + a_{r+1} u^{r+1} + \dots + a_n u^n, \qquad (3)$$

a_r, a_{r+1}, ... a_n reelle Zahlen bedeuten, r eine ganze, positive Zahl,

so wie n ist, so kann u immer so gewählt werden, daß der absolute Werth*) des ersten Gliedes größer wird, als die Summe aller folgenden Glieder.

Sei a_s die absolut größte der Zahlen $a_{r+1}, a_{r+2}, \ldots a_n$, so ist immer

$$a_{r+1}u^{r+1} + \ldots + a_n u^n \overset{=}{<} a_s(u^{r+1} + \ldots + u^n)$$
$$\overset{=}{<} a_s\left(\frac{u^{n+1} - u^{r+1}}{u-1}\right)$$
$$\overset{=}{<} a_s\left(\frac{u^{r+1} - u^{n+1}}{1-u}\right).$$

Sei $u < 1$, so braucht also nur, damit unser Satz richtig ist:

$$a_r u^r > \frac{a_s u^{r+1}}{1-u}, \text{ d. h. } u < \frac{a_r}{a_r + a_s}$$

zu sein. Sobald also $u < \frac{a_r}{a_r + a_s}$, wo a_r und a_s als positiv aufgefaßt sind, so ist der absolute Werth des ersten Gliedes größer als die Summe aller übrigen Glieder.

Z. B. in dem Ausdrucke:

$$-12u^r + 15u^{r+1} + 27u^{r+2} - 36u^{r+3} - 120u^{r+4} + 37u^{r+5}$$

ist $a_r = 12$, $a_s = 120$; sobald also $u < \frac{12}{12+120}$, ist

$$12.u^r > 15u^{r+1} + 27u^{r+2} + 36u^{r+3} + 120u^{r+4} + 37u^{r+5}$$

also gewiß auch größer als $\pm(15u^{r+1} + 27u^{r+2} - 36u^{r+3} - 120u^{r+4} + 37u^{r+5})$, wenn man das + Zeichen wählt in dem Falle, da die in den Klammern befindliche Größe positiv ist, das — Zeichen im entgegengesetzten Falle.

Daraus folgt, daß man in dem Ausdrucke (3) u immer klein genug annehmen kann, damit die Größe (3) dasselbe Vorzeichen habe, wie ihr erstes Glied, d. h. positiv oder negativ sei mit demselben. r kann füglich auch Null sein, wo dann $a_r u^r = a_0$, d. h. eine beliebige Zahl.

---

*) Der absolute Werth von 5 ist 5, von — 5 ist er +5 u. s. w. Er ist also das, was vorhin der Werth, ohne Rücksicht auf das Vorzeichen hieß. Siehe auch Anmerkung zu S. 26.

§. 3.

Die Gleichung

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots.+a_n=0, \qquad (4)$$

in der n eine ganze, positive Zahl, a_0, a_1, ... a_n beliebige reelle oder imaginäre Koeffizienten sind, heißt eine algebraische Gleichung des nten Grades. Eine (reelle oder imaginäre Zahl) α, so beschaffen, daß

$$a_0\alpha^n+a_1\alpha^{n-1}+\ldots+a_n=0,$$

heißt eine Wurzel der Gleichung (4). (Vergleiche auch S. 16.)

Nun behaupte ich, daß die Gleichung (4) immer eine Wurzel habe, und daß diese von der Form $a+bi$, d. h. eine gemischt imaginäre Zahl sei (die reell ist für $b=0$). (Seite 9.)

Stellen wir die erste Seite der Gleichung (4) durch f(x) dar, so daß die Gleichung (4) heißt $f(x)=0$, so folgt aus dem im zweiten Abschnitt der ersten Abtheilung Gesagten, daß immer, wenn p und q reell sind,

$$f(p+qi)=P+Qi=R(\cos S+i\sin S),$$

wo $R=+\sqrt{P^2+Q^2}$. Sollte also $p+qi$ eine Wurzel von (4) sein, so müßte $R=0$ sein (was auf $P=0$, $Q=0$ herauskommt). R ist immer eine positive Größe.

Setzen wir $p+qi=r(\cos\alpha+i\sin\alpha)$, und allgemein $a_m=c_m(\cos\varphi_m+i\sin\varphi_m)$, so ist

$$f(p+qi)=c_0r^n\Big(\cos(n\alpha+\varphi_0)+i\sin(n\alpha+\varphi_0)\Big)+$$
$$c_1r^{n-1}\Big(\cos(\overline{n-1}\alpha+\varphi_1)+i\sin(\overline{n-1}\alpha+\varphi_1)\Big)+\ldots..$$
$$+c_n(\cos\varphi_n+i\sin\varphi_n),$$

also

$$P=c_0r^n\cos(n\alpha+\varphi_0)+c_1r^{n-1}\cos(\overline{n-1}\alpha+\varphi_1)+\ldots..$$
$$+c_n\cos\varphi_n,$$
$$Q=c_0r^n\sin(n\alpha+\varphi_0)+c_1r^{n-1}\sin(\overline{n-1}\alpha+\varphi_1)+\ldots..$$
$$+c_{n-1}\sin(\alpha+\varphi_{n-1})+c_n\sin\varphi_n,$$

folglich

$$R^2=r^{2n}\Bigg[c_0{}^2+\frac{2c_0c_1}{r}\cos(\alpha+\varphi_0-\varphi_1)+$$
$$\frac{c_1{}^2+2c_0c_2\cos(2\alpha+\varphi_0-\varphi_2)}{r^2}+\ldots.\Bigg],$$

in welchem Ausdruck alle nach $c_0{}^2$ folgenden Glieder r, oder Potenzen von r, im Nenner haben. Die Größe R^2 besteht somit aus zwei Faktoren r^{2n} und $c_0{}^2+\frac{2c_0c_1\cos(\alpha+\varphi_0-\varphi_1)}{r}+\ldots..,$ wo $r^{2n}=(p^2+q^2)^n$.

Der erste Faktor r^{2n} wächst unbestimmt mit p und q, während der zweite sich mit gleichfalls unbestimmt wachsenden p und q der Gränze $c_0{}^2$ nähert. Daraus folgt, daß R^2 unbestimmt wachsen wird mit r und nur dann einen bestimmten, angebbaren Werth hat, wenn r einen solchen hat. Zugleich ändert sich R^2 stetig mit r (§. 1). Da aber R^2 immer positiv ist, so wird, wenn r sich ändert und alle möglichen (positiven) Werthe durchläuft, R^2 nothwendig eine unterste Gränze erreichen, ein oder mehrere Male, unter die es nicht sinken kann. Sei A^2 diese unterste Gränze, p_0, q_0 die Werthe von p und q, für die R^2 zu A^2 wird, so daß also R^2 nie kleiner als A^2 werden kann. Bezeichnen wir mit R_1 Das, was aus R wird, wenn man darin p_0+eh, q_0+ek für p und q setzt, wo e eine sehr kleine reelle Zahl ist, so darf also

$$R_1{}^2-A^2$$

niemals negativ sein, was auch h und k seien. Setzt man aber $h+ik=\varrho(\cos\varepsilon+i\sin\varepsilon)$, also $p_0+eh+(q_0+ek)i=p_0+q_0i+e\varrho(\cos\varepsilon+i\sin\varepsilon)$, so wird man erhalten:

$$\begin{aligned}
&f\big(p_0+eh+(q_0+ek)i\big)=\\
&+A(\cos S^{(0)}+i\sin S^{(0)})\\
&+e\varrho R'\big(\cos(S'+\varepsilon)+i\sin(S'+\varepsilon)\big)\\
&+\ \ldots\\
&\ \vdots\\
&+e^n\varrho^nR^{(n)}\big(\cos(S^{(n)}+n\varepsilon)+i\sin(S^{(n)}+n\varepsilon)\big)=\\
&R_1(\cos S_1+i\sin S_1),
\end{aligned}$$

wie man leicht findet, wenn man nach dem binomischen Satze nach Potenzen von $e\varrho(\cos\varepsilon+i\sin\varepsilon)$ entwickelt, die Koeffizienten jeder Potenz wieder auf die imaginäre Form bringt, die im zweiten Abschnitt der ersten Abtheilung betrachtet wurde und dann multiplizirt. Die Größen A, R′, R″, ... $R^{(n)}$ werden nicht zu gleicher Zeit Null sein, da sonst $p_0+eh+(q_0+ek)i$ eine Wurzel wäre.

Der reelle Theil dieser Entwicklung ist

$$A\cos S^{(0)}+e\varrho R'\cos(S'+\varepsilon)+\ldots+e^n\varrho^nR^{(n)}\cos(S^{(n)}+n\varepsilon),$$

der imaginäre:

$$\big(A\sin S^{(0)}+e\varrho R'\sin(S'+\varepsilon)+\ldots+e^n\varrho^nR^{(n)}\sin(S^{(n)}+n\varepsilon)\big)\,i.$$

Also ist

$$R_1{}^2 - A^2 = 2Ae\varrho[R'\cos(S'-S^{(0)}+\varepsilon)+\ldots$$
$$+e^{n-1}\varrho^{n-1}R^{(n)}\cos(S^{(n)}-S^{(0)}+n\varepsilon)]$$
$$+e^2\varrho^2\Big\{[R'\cos(S'+\varepsilon)+\ldots$$
$$+e^{n-1}\varrho^{n-1}R^{(n)}\cos(S^{(n)}+n\varepsilon)]^2$$
$$+[R'\sin(S'+\varepsilon)+\ldots$$
$$+e^{n-1}\varrho^{n-1}R^{(n)}\sin(S^{(n)}+n\varepsilon)]^2\Big\}. \quad (5)$$

Da der erste Theil dieser Gleichung, nach dem Frühern, nie negativ werden kann, so darf es der zweite auch nicht werden. Sei nun $R^{(m)}$ die erste der Größen R', R'', ..., die nicht verschwindet, so fängt die zweite Seite mit

$$2Ae^m\varrho^m R^{(m)}\cos(S^{(m)}-S^{(0)}+m\varepsilon)$$

an, welches Glied die niederste Potenz von e enthält. Für ein sehr kleines e hängt also das Zeichen dieses zweiten Theils blos von dem Zeichen des genannten Gliedes ab (§. 2). Da aber h und k ganz willkührlich sind, so kann man sie, also auch ε, immer so wählen, daß $\cos(S^{(m)}-S^{(0)}+m\varepsilon)$ nach Belieben positiv oder negativ ist, so daß also die zweite Seite auch negativ werden könnte, vorausgesetzt, daß irgend ein Glied von der genannten Beschaffenheit stehen bleibt. Da aber die zweite Seite nie negativ werden kann, so dürfen also derartige Glieder nicht vorkommen, was nur dann möglich ist, wenn $A=0$, in welchem Falle die zweite Seite der Gleichung (5) immer positiv ist, da e eine reelle Größe ist.

Daraus folgt nun, daß die unterste Gränze von R Null ist, d. h. daß

$$f(x_0+q_0 i) = A(\cos S^{(0)} + i\sin S^{(0)}) = 0,$$

oder daß $p_0+q_0 i$ eine Wurzel der Gleichung (4) ist, was den Satz beweist.

§. 4.

Die Gleichung

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n = 0, \quad (4)$$

hat also immer eine (reelle oder imaginäre) Wurzel x_0. Also ist

$$a_0x_0{}^n + a_1x_0{}^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x_0 + a_n = 0,$$

d. h.

$$a_n = -(a_0x_0{}^n + a_1x_0{}^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x_0).$$

Setzt man diesen Werth von a_n in (4), so folgt, daß die Gleichung auch heißt:

$$a_0(x^n - x_0{}^n) + a_1(x^{n-1} - x_0{}^{n-1}) + \ldots + a_{n-1}(x - x_0) = 0. \quad (6)$$

Ein jeder der Unterschiede $x^n-x_0^n$, $x^{n-1}-x_0^{n-1}$, ... $x-x_0$ läßt sich aber durch $x-x_0$ ohne Rest dividiren (Seite 16), folglich läßt sich auch die erste Seite der Gleichung (6) oder (4) durch $x-x_0$ ohne Rest theilen, oder wenn $b_0x^{n-1}+b_1x^{n-2}+ \ldots +b_{n-1}$ der Quotient ist, so ist die erste Seite =

$$(x-x_0)(b_0x^{n-1}+b_1x^{n-2}+\ldots+b_{n-1})$$

und mithin läßt sich die Gleichung (4) auch darstellen durch

$$(x-x_0)(b_0x^{n-1}+b_1x^{n-2}+\ldots+b_{n-1})=0, \quad (7)$$

worin b_0, b_1, ... b_{n-1} gewisse (reelle oder imaginäre) Koeffizienten sind.

Nun ist klar, daß jede Wurzel der Gleichung

$$b_0x^{n-1}+b_1x^{n-2}+\ldots+b_{n-1}=0, \quad (8)$$

zugleich auch Wurzel der Gleichung (4) ist. Die Gleichung (8) hat aber nach §. 3 jedenfalls eine (reelle oder imaginäre) Wurzel x_1, d. h. man kann sie darstellen durch

$$b_0x^{n-1}+b_1x^{n-2}+\ldots+b_{n-1}=(x-x_1)(c_0x^{n-2}+c_1x^{n-3}+\ldots+c_{n-2})=0. \quad (9)$$

Wendet man nun auf $c_0x^{n-2}+c_1x^{n-3}+\ldots+c_{n-2}$ dieselben Betrachtungen an, so findet man, daß

$$c_0x^{n-2}+c_1x^{n-3}+\ldots+c_{n-2}=0, \quad (10)$$

jedenfalls eine Wurzel x_2 hat, so daß

$$c_0x^{n-2}+\ldots+c_{n-2}=(x-x_2)(d_0x^{n-3}+\ldots+d_{n-3}), \quad (11)$$

u. s. f.

Daraus folgt, daß (4) die Wurzeln x_0, x_1, x_2, ... habe und durch

$$(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\ldots P=0, \quad (12)$$

dargestellt werden könne. P enthält niemals x im Nenner, d. h. keine negativen Potenzen von x. So lange P positive Potenzen von x enthält, kann man obige Betrachtung darauf wiederholt anwenden, die erst aufhört, wenn P eine bloße Zahl geworden ist. In diesem Falle hat man n Faktoren $x-x_0$, $x-x_1$, ... $x-x_{n-1}$ erhalten, so daß

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n=P(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1})=0, \quad (13)$$

und folglich $P=a_0$ ist.

Man schließt daraus, daß die Gleichung (4) immer n (reelle oder imaginäre) Wurzeln habe, nicht mehr und nicht weniger, so wie, daß wenn x_1, x_2, ..., x_n diese Wurzeln sind, identisch

$$a_0x_n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n=a_0(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n), \quad (14)$$

ist, während einige der Werthe $x_1, x_2, \ldots x_n$ auch einander gleich sein können. (Vergl. S. 16).

§. 5.

In allem Folgenden wollen wir nun annehmen, daß die Koeffizienten $a_0, a_1, \ldots, a_n$ sämmtlich reelle Zahlen seien, welche Annahme für unsern Zweck durchaus genügend ist. Alle folgenden Sätze gelten also nur unter dieser Beschränkung.

Wenn die Gleichung

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n = 0, \qquad (15)$$

eine imaginäre Wurzel $a + bi$ hat, so hat sie nothwendig auch eine imaginäre Wurzel $a - bi$.

Sei $a + bi = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$, so muß also:

$$a_0 r^n(\cos n\alpha + i\sin n\alpha) + a_1 r^{n-1}(\cos\overline{n-1}\alpha + i\sin\overline{n-1}\alpha) + \ldots$$
$$+ a_n = 0,$$

d. h. (Seite 11)

$$a_0 r^n \cos n\alpha + a_1 r^{n-1}\cos(n-1)\alpha + \ldots + a_{n-1} r\cos\alpha + a_n = 0$$
$$a_0 r^n \sin n\alpha + a_1 r^{n-1}\sin(n-1)\alpha + \ldots + a_{n-1} r\sin\alpha = 0$$

sein. Daraus folgt aber, daß auch

$$a_0 r^n \cos n\alpha + a_1 r^{n-1}\cos(n-1)\alpha + \ldots + a_n$$
$$- i[a_0 r^n \sin n\alpha + a_1 r^{n-1}\sin(n-1)\alpha + \ldots + a_{n-1} r\sin\alpha] = 0,$$

d. h.

$$a_0 r^n(\cos n\alpha - i\sin n\alpha) + a_1 r^{n-1}\left(\cos\overline{n-1}\alpha - i\sin\overline{n-1}\alpha\right) + \ldots$$
$$+ a_{n-1} r(\cos\alpha - i\sin\alpha) + a_n = 0,$$

oder (S. 11, Formel (3))

$$a_0 r^n(\cos\alpha - i\sin\alpha)^n + a_1 r^{n-1}(\cos\alpha - i\sin\alpha)^{n-1} + \ldots + a_n = 0,$$

was ausdrückt, daß $r(\cos\alpha - i\sin\alpha) = a - bi$ auch eine Wurzel der Gleichung (15) ist.

Die imaginären Wurzeln einer Gleichung (15) sind also immer paarweise vorhanden. Kommt demnach unter den Faktoren in (14) einer $(x - \alpha - \beta i)$ vor, so kommt auch nothwendig der Faktor $(x - \alpha + \beta i)$ vor. Da ihr Produkt $(x - \alpha - \beta i)(x - \alpha + \beta i) = (x - \alpha)^2 + \beta^2$ immer reell ist, so kann man also auch sagen, daß jeder Ausdruck $a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$ in reelle Faktoren des ersten oder zweiten Grades zerlegt werden kann. ($a_0, a_1, \ldots, a_n$ reell.)*)

---

*) Daraus folgt auch leicht, was man sonstwo benützen kann, daß der Ausdruck

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n = f(x),$$

vorausgesetzt, daß die Gleichung $f(x) = 0$ lauter imaginäre Wurzeln habe und

§. 6.

Es ist, unbeschadet der Allgemeinheit, in der Gleichung (15) erlaubt, $a_0=1$ zu setzen, d. h. die Gleichung unter der Form

$$x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_n=0, \qquad (16)$$

zu betrachten, da man diese Form aus (15) ableitet, wenn man mit a_0 dividirt. Sind nun $x_1, x_2, \ldots x_n$ die Wurzeln von (16), so ist (§. 4):

$$x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_n=(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n). \qquad (17).$$

Aus (17) folgt nun offenbar, daß

$$a_1=-(x_1+x_2+\ldots x_n),$$
$$a_n=(-1)^n x_1x_2\ldots x_n, \qquad (18)$$

und überhaupt, das a_2 gleich der Summe aller Verbindungen der n Größen $x_1, \ldots x_n$ zu je zwei; $-a_3$ gleich der Summe aller Verbindungen derselben Größen zu je drei u. s. w.

Es ist darum sehr leicht, die Gleichung nten Grades zu bilden, welche die nWurzeln $x_1, x_2, \ldots x_n$ hat. Sie ist

$$(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)=0.$$

Aus den Gleichungen (18) schließt man Folgendes:

1) Da jede Gleichung von ungeradem Grade eine reelle Wurzel hat (§. 5, da die imaginären Wurzeln paarweise vorkommen), so ist, wenn sie blos eine hat, diese von verschiedenem Zeichen mit dem letzten Gliede der Gleichung.*) Das Produkt je zweier imaginären Wurzeln $(\alpha+\beta i)(\alpha-\beta i)=\alpha^2+\beta^2$ ist nämlich immer positiv.

2) Wenn n eine gerade Zahl ist, und a_n ist negativ, so hat die Gleichung zwei reelle Wurzeln, eine positive und eine negative.

---

die Koeffizienten $a_0, a_1, \ldots\ldots a_n$ sämmtlich reell seien, für jeden beliebigen reellen Werth von x beständig dasselbe Zeichen haben muß, und zwar das Vorzeichen von a_0. Aus (14) folgt nämlich, verglichen mit dem eben Gesagten, daß, wenn $\alpha_1\pm\beta_1 i, \alpha_2\pm\beta_2 i, \ldots$ die sämmtlich imaginären Wurzeln von $f(x)=0$ sind:

$$f(x)=a_0[(x-\alpha_1)^2+\beta_1^2][(x-\alpha_2)^2+\beta_2^2]\ldots,$$

wobei natürlich vorausgesetzt ist, daß n eine gerade Zahl sei. Soll also ein Ausdruck f(x) sein Zeichen für keinen reellen Werth von x ändern oder Null werden können, so muß $f(x)=0$ lauter imaginäre Wurzeln haben. (Vergl. §. 7.)

*) Diese immer auf die Form (16) gebracht, so daß das höchste Glied positiv ist, und den Koeffizienten 1 hat.

§. 7.

Seien $b_1, b_2, \ldots b_r$ die reellen Wurzeln der Gleichung (16), so kann man setzen

$$x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n = (x - b_1)(x - b_2) \ldots (x - b_r).\ \varphi(x), \quad (19)$$

wenn $\varphi(x)$ das Produkt der den imaginären Wurzeln entsprechenden Faktoren ist (§. 4). Sind keine imaginären Wurzeln vorhanden, so ist $\varphi(x) = 1$. Da aber je zwei solcher Faktoren ein Produkt der Form $(x - \alpha)^2 + \beta^2$ geben (§. 5), so ist $\varphi(x)$ für alle möglichen reellen Werthe von x positiv.

Legt man nun dem x in (16) oder (19) zwei reelle Werthe c_1 und c_2 bei und sind die erhaltenen Zahlen:

a) von verschiedenem Zeichen, so müssen zwischen c_1 und c_2 liegen 1, 3, 5, ... überhaupt eine ungerade Anzahl reeller Wurzeln. Es ist nämlich klar, daß, da $\varphi(x)$ immer positiv ist, das Produkt $(c_1 - b_1)(c_1 - b_2) \ldots (c_1 - b_r)$ von verschiedenem Zeichen ist mit $(c_2 - b_1)(c_2 - b_2) \ldots (c_2 - b_r)$, so daß entweder eine, oder drei, oder fünf, ... der Größen $b_1, b_2, \ldots b_r$ zwischen c_1 und c_2 liegen müssen;

b) von gleichem Zeichen, so müssen zwischen c_1 und c_2 liegen 0, oder 2, oder 4, ... überhaupt eine gerade Anzahl reeller Wurzeln, was wie so eben erhellt.

Z. B. aus der Gleichung

$$x^5 - 4x^3 + 8x - 12 = 0,$$

erhält man, wenn man in der ersten Seite $x = 1$ setzt: $1 - 4 + 8 - 12 = -7$; wenn man $x = 2$ setzt: $32 - 32 + 16 - 12 = +4$; also liegt 1, oder liegen 3, oder gar 5 reelle Wurzeln zwischen 1 und 2.

§. 8.

Künftig mag, der Kürze wegen, die erste Seite der Gleichung (16) mit f(x) bezeichnet werden, so daß dieselbe heißt

$$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n = 0. \quad (20)$$

Sind nun alle Koeffizienten in f(x) ganze Zahlen, so gibt es keinen reellen, rationalen Bruch, der eine Wurzel der Gleichung $f(x) = 0$ ist.

Denn sei $\frac{m}{r}$ ein solcher Bruch, der auf seine kleinste Benennung

gebracht ist, so müßte, wenn derselbe Wurzel der Gleichung (20) sein sollte:

$$\frac{m^n}{r^n}+\frac{a_1 m^{n-1}}{r^{n-1}}+\ldots\ldots+a_n=0$$

sein, d. h. wenn man mit r^{n-1} multiplizirt und dann $\frac{m^n}{r}$ bestimmt:

$$\frac{m^n}{r}=-(a_1 m^{n-1}+a_2 r m^{n-2}+\ldots+a_n r^{n-1}).$$

Die zweite Seite dieser Gleichung ist eine ganze Zahl, die erste nicht, also kann die Gleichung nicht bestehen, folglich kann auch nicht $\frac{m}{r}$ Wurzel der Gleichung sein.

Jede Gleichung kann aber leicht in eine solche verwandelt werden, deren Koeffizienten lauter ganze Zahlen sind. Setzt man nämlich $x=\frac{z}{p}$, so folgt aus $f(x)=0$, wenn man mit p^n multiplizirt:

$$z^n+a_1 p z^{n-1}+a_2 p^2 z^{n-2}+\ldots+a_n p^n=0,$$

und man wird p immer so bestimmen können, daß hier alle Koeffizienten ganze Zahlen sind.

§. 9.

Seien wieder $a_1, \ldots . a_n$ ganze Zahlen, so hat die Gleichung (16), wenn sie rationale, reelle Wurzeln hat, nur ganze Zahlen zu solchen Wurzeln (§. 8). Zugleich folgt aus (18), daß eine jede Wurzel ein Faktor des letzten Gliedes a_n sein muß. Sei nun c eine solche Wurzel, so muß:

$$c^n+a_1 c^{n-1}+a_2 c^{n-2}+\ldots+a_n=0,$$

also

$$a_n+a_{n-1}c+a_{n-2}c^2+a_{n-3}c^3+\ldots+a_1 c^{n-1}=-c^n$$

$$\frac{a_n}{c}+a_{n-1}+a_{n-2}c+a_{n-3}c^2+\ldots+a_1 c^{n-2}=-c^{n-1},$$

$$\frac{\frac{a_n}{c}+a_{n-1}}{c}+a_{n-2}+a_{n-3}c+\ldots+a_1 c^{n-3}=-c^{n-2},$$

$$\cfrac{\cfrac{\frac{a_n}{c}+a_{n-1}}{c}+a_{n-2}}{c}+a_{n-3}+\ldots+a_1c^{n-4}=-c^{n-3},$$

$$\vdots$$

endlich

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\frac{a_n}{c}+a_{n-1}}{c}+a_{n-2}}{c}+a_{n-3}}{c}+\ldots$$

$$\frac{\ldots+a_1}{c}=-1, \quad (21)$$

und jede ganze Zahl c, welche diese Bedingung (21) erfüllt, ist eine Wurzel der Gleichung (16), wie man sich durch Multiplikation überzeugt, indem aus (21) folgt:

$$c^n+a_1c^{n-1}+\ldots\ldots+a_n=0.$$

Da c immer ein Faktor von a_n ist, so braucht man mithin nur die Faktoren dieses letzten Gliedes zu untersuchen. Man wird dies am einfachsten in folgender Weise thun, die an Beispielen erläutert werden soll.

Sei

$$x^5-8x^4+22x^3-26x^2+21x-18=0.$$

Die Faktoren von $a_n=-18$ sind ±1, ±2, ±3, ±6, ±9, ±18.

Faktoren (c)	+ 1	2	3	6	9	18	− 1	− 2	− 3	− 6	− 9	−18
−18 dividirt	−18	− 9	− 6	− 3	− 2	− 1	+18	9	6	3	2	1
+21 addirt	+ 3	12	15	18	19	20	39	30	27	24	23	22
dividirt	3	6	5	3			−39	−15	− 9	− 4		
−26 addirt	−23	−20	−21	−23			−65	−41	−35	−30		
dividirt	−23	−10	− 7				65			5		
22 addirt	− 1	12	15				87			27		
dividirt	− 1	6	5				−87					
−8 addirt	− 9	− 2	− 3				−95					
dividirt	− 9	− 1	− 1				95					

also sind blos 2 und 3 rationale, reelle Wurzeln unserer Gleichung. (Sobald die Division einmal nicht möglich ist, braucht man den betreffenden Faktor nicht weiter zu untersuchen.)

Sei

$$x^4 - 45x^2 - 40x + 84 = 0. \quad (n=4,\ a_1=0,\ a_2=-45,\ a_3=-40,\ a_4=84)$$

Faktoren des letzten Gliedes: ± 1, ± 2, ± 3, ± 4, ± 6, ± 7, ± 12, ± 14, ± 21, ± 28, ± 42, ± 84.

Wir wollen nur zuerst die 12 ersten untersuchen.

Faktoren (c)	1	2	3	4	6	7	— 1	— 2	— 3	— 4	— 6	— 7
84 dividirt	84	42	28	21	14	12	— 84	—42	—28	—21	—14	—12
—40 addirt	44	2	—12	—19	—26	—28	—124	—82	—68	—61	—54	—52
dividirt	44	1	— 4			— 4	124	41			+ 9	
—45 addirt	— 1	—44	—49			—49	79	— 4			—36	
dividirt	— 1	—22				— 7	— 79	2			6	
0 addirt	— 1	—22				— 7	— 79	2			6	
dividirt	— 1	—11				— 1	79	— 1			— 1	

also sind 1, 7, —2, —6 Wurzeln unserer Gleichung, und da sie nicht mehr als vier haben kann, so braucht man die übrigen Faktoren nicht zu untersuchen.

§. 10.

Bezeichnen wir den Ausdruck $x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$, wie oben mit $f(x)$, bilden sodann den davon abgeleiteten Ausdruck $f_1(x)$, indem wir jedes Glied mit dem Exponenten der darin enthaltenen Potenz von x multipliziren, und zugleich den Exponenten um 1 vermindern, so daß

$$f_1(x) = nx^{n-1} + (n-1)a_1 x^{n-2} + (n-2)a_2 x^{n-3} + \ldots + a_{n-1};$$

bilden wir weiter $f_2(x)$ in derselben Weise, so daß

$$f_2(x) = n(n-1)x^{n-2} + (n-1)(n-2)a_1 x^{n-3} + \ldots + 2a_{n-2},$$

u. s. w. allgemein:

$$f_r(x) = n(n-1)\ldots(n-r+1)x^{n-r} + (n-1)(n-2)\ldots(n-r)a_1 x^{n-r-1} + \ldots + r.(r-1)\ldots 1 a_{n-r},$$

.
.
.
.

$$f_n(x) = n(n-1)(n-2)\ldots 1;$$

$$f_{(n+r)}(x) = 0,\ r > 0,$$

so wird man, wenn man durch $f(x+z)$ Das bezeichnet, was man aus $f(x)$ erhält, wenn man $x+z$ statt x schreibt, vermöge des binomischen Satzes finden:

$$f(x+z) = f(x) + z f_1(x) + \frac{z^2}{1.2} f_2(x) + \frac{z^3}{1.2.3} f_3(x) + \ldots + \frac{z^n}{1.2\ldots n} f_n(x). \qquad (22)$$

$f_1(x)$ heißt die erste, $f_2(x)$ die zweite u. s. f. abgeleitete Funktion von $f(x)$. Zugleich ist $f_2(x)$ die erste abgeleitete Funktion von $f_1(x)$, $f_3(x)$ die zweite von $f_1(x)$ u. s. w.

Diese Formen geben nun ein leichtes Kennzeichen, um zu bestimmen, ob eine Gleichung $f(x) = 0$ mehrere einander gleiche Wurzeln habe.

Gesetzt nämlich, b (reell oder imaginär) sei m mal Wurzel von $f(x)=0$, so muß (§. 4):

$$f(x) = (x-b)^m (x-k_1)(x-k_2)\ldots,$$

sein, wenn $k_1, k_2, \ldots$ die übrigen Wurzeln der Gleichung bedeuten. Setzt man nun $x=b+h$, so wird also

$$f(b+h) = h^m (b+h-k_1)(b+h-k_2)\ldots \qquad (23)$$

sein müssen. Aus (22) folgt aber für $x=b$, $z=h$:

$$f(b+h)=f(b)+hf_1(b)+\frac{h^2}{1.2}f_2(b)+\ldots$$
$$+\frac{h^m}{1.2\ldots m}f_m(b)+\ldots+\frac{h^n}{1.2\ldots n}f_n(b).\,^{*})$$

Da aber nach (23) in $f(b+h)$ keine niederere Potenz von h als die $m$te vorkommen darf, so muß in diesem Falle:

$$f(b)=0,\ f_1(b)=0,\ \ldots,\ f_{m-1}(b)=0, \qquad (24)$$

sein.

Umgekehrt, hat man die Gleichungen (24), und ist $f_m(b)$ nicht Null, so ist b nur m mal Wurzel der Gleichung $f(x)=0$. Denn alsdann ist

$$f(b+h)=\frac{h^m}{1.2\ldots m}f_m(b)+\frac{h^{m+1}}{1.2\ldots m+1}f_{m+1}(b)+\ldots$$
$$+\frac{h^n}{1.2\ldots n}f_n(b)$$
$$=h^m(A_0+A_1h+\ldots+A_{n-m}h^{n-m}),$$

also für $h=x-b$:

$$f(x)=(x-b)^m[A_0+A_1(x-b)+\ldots+A_{n-m}(x-b)^{n-m}],$$

d. h. b ist m mal Wurzel von $f(x)=0$. Sind also die $m-1$ ersten abgeleiteten Funktionen von $f(x)$ für $x=b$ Null, so ist b m mal Wurzel von $f(x)=0$, und nicht mehr mal, wenn die $m$te abgeleitete Funktion für $x=b$ nicht Null ist.

Hat also eine Gleichung $f(x)=0$ gleiche Wurzeln, so ist, für diese Wurzeln, auch $f_1(x)=0$, d. h. die beiden Gleichungen

$$f(x)=0,\ f_1(x)=0,$$

werden von gleichen Werthen von x erfüllt.

Ist aber eine Zahl b m mal Wurzel von $f(x)=0$, so ist sie nur $m-1$ mal Wurzel von $f_1(x)=0$. Denn da dann $f(b)=0$, $f_1(b)=0, \ldots, f_{m-1}(b)=0$, nicht aber $f_m(b)=0$; $f_m(x)$ aber nur die $(m-1)$te abgeleitete Funktion von $f_1(x)$ ist, so ist auch b nur $m-1$ mal Wurzel von $f_1(x)=0$.

Hat also die Gleichung $f(x)=0$ die m gleichen Wurzeln a, die r gleichen Wurzeln b, u. s. w., so hat die Gleichung $f_1(x)=0$ die $m-1$ gleichen Wurzeln a, die $r-1$ gleichen Wurzeln b, u. s. w.

---

*) Wo $f(b)$, $f_1(b)$, ... Das bezeichnen, was aus $f(x)$, $f_1(x)$, ... wird, wenn man b für x setzt.

D. h. ist

$$f(x)=(x-a)^m(x-b)^r(x-c)^s \ldots \varphi(x),$$

so ist

$$f_1(x)=(x-a)^{m-1}(x-b)^{r-1}(x-c)^{s-1} \ldots \psi(x).$$

Enthält $\varphi(x)$ keine gleichen einfachen Faktoren, so enthält $\psi(x)$ auch keinen Faktor, der in $\varphi(x)$ vorkommt.

Hat $f(x)=0$ keine gleichen Wurzeln, so haben die Gleichungen

$$f(x)=0,\ f_1(x)=0$$

keine gemeinschaftliche Wurzel.

Aus dem Vorstehenden folgt nun leicht, daß wenn $f(x)=0$ gleiche Wurzeln hat, $f(x)$ und $f_1(x)$ gleiche Faktoren haben, d. h. einen gemeinschaftlichen Theiler. Sucht man nun den etwaigen gemeinschaftlichen Theiler von $f(x)$ und $f_1(x)$, so enthält derselbe alle diejenigen einfachen Faktoren, die in $f(x)$ (§. 4 und 5) vorkommen, jeden einmal weniger, als er in $f(x)$ ist; andere Faktoren enthält derselbe nicht. Sei $\varphi(x)$ dieser Theiler, so wird der Quotient $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ genau dieselben einfachen Faktoren haben, wie $f(x)$, aber jeden nur einmal, so daß die Gleichungen:

$$f(x)=0,\ \frac{f(x)}{\varphi(x)}=0,$$

genau dieselben Wurzeln haben, die letztere aber jede nur einmal.

Uebrigens kann man leicht auch folgende Sätze nachweisen, die das Obige noch weiter erläutern können.

Sei

$$f(x)=(x-a)(x-b)(x-c) \ldots,$$

wo ganz wohl einige der Zahlen a, b, c, ... einander gleich sein dürfen, so wird $f_1(x)$ in folgender Weise zu bestimmen sein. Aus (22) folgt offenbar, daß man $f_1(x)$ erhalten werde, wenn man in dem Bruche $\frac{f(x+z)-f(x)}{z}$, nachdem man alle möglichen Divisionen vollzogen hat, $z=0$ setzt. Thut man Dies in obigem Ausdruck, indem man

$$\frac{(x+z-a)(x+z-b)(x+z-c)\ldots-(x-a)(x-b)(x-c)\ldots}{z}$$

entwickelt und dann $z=0$ setzt, so findet sich:

$$f_1(x) = (x-b)(x-c)(x-d) \ldots$$
$$+ (x-a)(x-c)(x-d) \ldots$$
$$+ (x-a)(x-b)(x-d) \ldots$$
$$+ \ldots \quad {}^{*})$$

oder

$$f_1(x) = \frac{f(x)}{x-a} + \frac{f(x)}{x-b} + \frac{f(x)}{x-c} + \ldots \quad (23)$$

Ist a m mal Wurzel von f(x), b r mal, c s mal u. s. f., also

$$f(x) = (x-a)^m (x-b)^r (x-c)^s \ldots,$$

so folgt aus (23):

$$f_1(x) = \frac{mf(x)}{x-a} + \frac{rf(x)}{x-b} + \frac{sf(x)}{x-c} \ldots, \quad (24)$$

wie man auch leicht unmittelbar finden wird, wenn man obige Bestimmungsweise von $f_1(x)$ hier anwendet.

Daraus ergibt sich dann auch von selbst, daß a nun m—1 mal Wurzel von $f_1(x) = 0$, b r—1 mal u. s. w. ist.

§. 11.

Es wird hier nicht am unrechten Orte sein, Einiges in Bezug auf die Art zu sagen, wie man den größten gemeinschaftlichen Theiler zweier Ausdrücke von obiger Form sucht. Die Art und Weise dieser Aufsuchung ist dieselbe, wie bei ganzen Zahlen, deren größten gemeinschaftlichen Theiler man sucht. Man dividirt durch den Ausdruck, der von niederem Grade ist, in den von höherem Grade, bis man zu einem Reste gelangt, dessen Grad niederer ist, als der des Divisors; sodann dividirt man mit diesem Reste in den vorigen Divisor, bis man zu einem neuen Reste gelangt, der von niederem Grade ist, als der jetzige Divisor, mit welchem Reste man eben so verfährt, wie vorhin u. s. w. Derjenige dieser Reste, der im vorhergehenden genau aufgeht, ist der gesuchte gemeinschaftliche Theiler. Dabei bezieht sich das „Aufgehen" nicht auf die Koeffizienten, sondern

---

*) Sind a, b, c, .., ihrer Größe nach geordnet, die reellen einfachen Wurzeln von f(x)=0, so sieht man hieraus, daß $f_1(a)$ positiv, $f_1(b)$ negativ, $f_1(c)$ positiv u. s. w., so daß die reellen Wurzeln der Gleichung $f_1(x)=0$ zwischen denen der Gleichung f(x)=0 liegen (§. 7). Hat die Gleichung f(x)=0 auch imaginäre Wurzeln, so thut Dies, wie man leicht sieht, obiger Behauptung keinerlei Eintrag, indem die den imaginären Wurzeln entsprechenden Faktoren immer zu einem quadratischen Faktor zusammentreten, der für jeden Werth von x sein gleiches Vorzeichen behält (§. 5). Da $f_2(x)$ aus $f_1(x)$ abgeleitet wird, wie $f_1(x)$ aus f(x), so liegen also die reellen Wurzeln von $f_2(x)=0$ zwischen denen von $f_1(x)=0$, u. s. w.

lediglich auf die Potenzen der Größe x. Bei den auf einander folgenden Divisionen wird man im Allgemeinen Brüche zu Koeffizienten erhalten, mit denen die Rechnung erschwert würde. Man kann sie aber vermeiden, indem man jeweils multiplizirt, wie Dies am besten an folgendem Beispiele zu ersehen ist. Man kann dabei noch bemerken, daß es offenbar ganz gleichgültig ist, ob man x^3+x^2-5x+3, oder $5(x^3+x^2-5x+3)$, oder $a(x^3+x^2-5x+3)$ als gemeinschaftlichen Theiler erhält, wenn a irgend eine Zahl bedeutet, denn wenn x^3+x^2-5x+3 in irgend einem Ausdruck enthalten ist, so ist es auch $a(x^3+x^2-5x+3)$.

Sei also zwischen

$$x^6+4x^5-3x^4-16x^3+11x^2+12x-9$$

und

$$6x^5+20x^4-12x^3-48x^2+22x+12$$

der größte gemeinschaftliche Theiler zu suchen.

Man hat nun zunächst den ersten Ausdruck durch den zweiten zu dividiren. Da aber hier schon Brüche zum Vorschein kämen, so multiplizire man den ersten Ausdruck mit 6, wodurch nichts Weiteres geschieht, als daß der endliche Rest eben versechsfacht wird. Auf den Quotienten kommt es ohnehin hier gar nicht an. Man hat also

$$\begin{array}{l|l} 6x^6+24x^5-18x^4-96x^3+66x^2+72x-54 & 6x^5+20x^4-12x^3-48x^2+22x+12 \\ \cline{2-2} 6x^6+20x^5-12x^4\quad 48x^3+22x^2+12x & x+2 \\ \hline \text{Rest: } 4x^5-6x^4-48x^3+44x^2+60x-54 & \end{array}$$

Da dieser Rest wieder Brüche geben würde, so multiplizire ich ihn mit 3, wodurch der Endrest abermals vervielfacht wird, so daß man ihn jetzt 18fach erhalten wird:

$$\begin{array}{r} 12x^5-18x^4-144x^3+132x^2+180x-162 \\ 12x^5+40x^4-24x^3-96x^2+44x+24 \\ \hline -58x^4-120x^3+228x^2+136x-186 \end{array}$$

Dieser Endrest ist nun das 18fache Dessen, was man in gewöhnlicher Weise erhalten hätte; er läßt sich übrigens durch 2 dividiren und wird dadurch auf das 9fache herabgebracht:

$$-29x^4-60x^3+114x^2+68x-93.$$

Nun muß man $6x^5+20x^4-12x^3-48x^2+22x+12$ durch $-29x^4-60x^3+114x^2+68x-93$ dividiren.

Da der jetzige Divisor das 9fache des wahren ist, so wird man nur das $\frac{1}{9}$fache des wahren Restes erhalten. Da aber die Division 29 in 6 nicht aufgeht, so multiplizire ich mit 29, wodurch also der Rest 29 mal genommen wird, man also das $\frac{29}{9}$fache desselben erhält.

$$\begin{array}{l|l} 174x^5+580x^4-348x^3-1392x^2+638x+348 & -29x^4-60x^3+114x^2+68x-93 \\ 174x^5+360x^4-684x^3-408x^2+558x & -6x-55 \\ \hline \quad 220x^4+336x^3-984x^2+80x+348 & \end{array}$$

Zunächst dividire man hier mit 4, so daß man also das $\frac{1}{4}\cdot\frac{29}{9}=\frac{29}{36}$fache des wahren Restes erhält:

$$55x^4+84x^3-246x^2+20x+87$$

und nun multiplizire man mit 29, wodurch der Rest $\frac{29.29}{36}$ mal erscheint:

$$\begin{array}{r} 1595x^4+2436x^3-7134x^2+580x+2523 \\ 1595x^4+3300x^3-6270x^2-3740x+5115 \\ \hline -864x^3-864x^2+4320x-2592. \end{array}$$

Dividirt man noch durch 4, so erhält man also das $\frac{29.29}{4.36}$fache des wahren Restes:

$$-216x^3-216x^2+1080x-648,$$

oder wenn man noch durch 216 dividirt:

$$-x^3-x^2+5x-3,$$

welcher Rest das $\frac{29.29}{864.36}$fache des wahren ist. Mit diesem Rest hat man in $-29x^4-60x^3+114x^2+68x-93$ zu dividiren. Der Divisor ist das $\frac{29.29}{864.36}$fache von Dem, was er sein würde, wenn man gewöhnlich gerechnet hätte; der Dividend aber ist das 9fache, also wird jetzt der Rest das $\frac{864.36.9}{29.29}$fache sein:

$$\begin{array}{l|l} -29x^4-60x^3+114x^2+68x-93 & -x^3-x^2+5x-3 \\ -29x^4-29x^3+145x^2-87x & 29x+31 \\ \hline \quad -31x^3-31x^2+155x-93 & \\ \quad -31x^3-31x^2+155x-93 & \\ \hline \qquad 0 & \end{array}$$

Da jetzt die Division aufgeht, so ist $-x^3-x^2+5x-3$ der gemeinschaftliche, größte Theiler, und zwar das $\frac{29.29}{864.36}$ fache Dessen, was man auf gewöhnliche Weise gefunden hätte, was aber für unsern Zweck ganz gleichgiltig ist. Man überzeugt sich leicht, daß $-x^3-x^2+5x-3$ sowohl in $x^6+4x^5-3x^4-16x^3+11x^2+12x-9$, als auch in $6x^5+20x^4-12x^3-48x^2+22x+12$ enthalten ist.

Ist der letzte Rest eine bloße Zahl, so haben die vorgelegten Ausdrücke keinen gemeinschaftlichen Theiler. So findet man als größten gemeinschaftlichen Theiler zwischen $2x^4-12x^3+19x^2-6x+9$ und $8x^3-36x+38x-6$: $x-3$; zwischen $x^7+5x^6+6x^5-6x^4-15x^3-3x^2+8x+4$ und $7x^6+30x^5+30x^4-24x^3-45x^2-6x+8$: $x^4+3x^3+x^2-3x-2$ u. s. w.

§. 12.

Das im vorigen Paragraphen gerechnete Beispiel ist uns zugleich ein Beispiel zu §. 10. Sei nämlich

$$f(x)=x^6+4x^5-3x^4-16x^3+11x^2+12x-9,$$

so ist

$$f_1(x)=6x^5+20x^4-12x^3-48x^2+22x+12$$

und der größte gemeinschaftliche Theiler beider $\varphi(x)=x^3+x^2-5x+3$, wenn wir sein Zeichen verkehren, was offenbar keinerlei Einfluß hat. Daraus findet sich:

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)}=x^3+3x^2-x-3.$$

Die Gleichung

$$x^3+3x^2-x-3=0$$

hat also dieselben Wurzeln, wie $f(x)=0$, jede nur einmal, während die Gleichung $\varphi(x)=0$ genau nur solche Wurzeln hat, die in $f(x)=0$ mehrere Male vorkommen, jede einmal weniger.

Eine Wurzel der Gleichung $\varphi(x)=0$ ist $+1$, eine andere wieder $+1$, die dritte -3.*) Also hat die vorgelegte Gleichung $f(x)=0$: drei Wurzeln $=+1$, zwei $=-3$ und dann noch eine $=-1$. Die Gleichung $f(x)=0$ hat aber im Ganzen nur sechs Wurzeln, die somit alle gefunden sind und es ist (§. 4):

$$x^6+4x^5-3x^4-16x^3+11x^2+12x-9=(x-1)^3(x+1)(x+3)^2.$$

Man sieht leicht ein, daß es in §. 10 nicht durchaus nothwendig war, $a_0=1$ zu setzen. Alles dort Gesagte behält seine Richtigkeit, wenn auch nicht $a_0=1$ ist.

Für unsere jetzigen Zwecke ist es von Wichtigkeit, die reellen Wurzeln einer Gleichung bestimmen zu können, da die Anwendung gewöhnlich nur auf diese Rücksicht nimmt. Wir wollen nun in

---

*) Man findet die zwei letzten, wenn man x^3+x^2-5x+3 durch $x-1$ dividirt, was x^2+2x-3 gibt, dies $=0$ setzt und auflöst.

folgendem Abschnitt zuerst einen Lehrsatz erweisen, vermöge dessen man immer bestimmen kann, wie viele reelle Wurzeln einer vorgelegten Gleichung zwischen zwei gegebenen Zahlen seien.

Fünfter Abschnitt.

Der Sturm'sche Satz.

§. 1.

Bezeichnen wir den Ausdruck

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_{n-1}x+a_n$$

durch f(x); durch $f_1(x)$ seine erste abgeleitete Funktion (§. 10 des vorigen Abschnitts):

$$na_0x^{n-1}+(n-1)a_1x^{n-2}+\ldots+a_{n-1},$$

und verfahren wir nun mit diesen zwei Ausdrücken so, als ob wir ihren größten gemeinschaftlichen Theiler suchen wollten (§. 11 des vor. Abschn.), haben dabei jedoch Sorge, jeweils das Zeichen des Restes in das entgegengesetzte zu verwandeln. Seien diese, mit entgegengesetztem Zeichen genommenen Reste:

$$f^2(x),\ f^3(x),\ \ldots.\ f^r(x),$$

wobei die Bezeichnung f^2, f^3, ... natürlich keinerlei Potenzenbezeichnung ist.

Der letzte Rest $f^r(x)$ ist nun entweder eine bloße Zahl p, in welchem Falle f(x) und $f_1(x)$ keinen gemeinschaftlichen Theiler haben, oder er ist ein, x enthaltender Ausdruck, in welchem Falle $f^r(x)$ der größte gemeinschaftliche Theiler von f(x) und $f_1(x)$ ist.

Wir wollen nun zunächst den ersten Fall betrachten.

§. 2.

Sei also $f^r(x)=p$, d. h. eine bloße Zahl. Alsdann wird man folgende Gleichungen haben:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= Q_1 f_1(x) - f^2(x), \\
f_1(x) &= Q_2 f^2(x) - f^3(x), \\
f^2(x) &= Q_3 f^3(x) - f^4(x), \\
f^3(x) &= Q_4 f^4(x) - f^5(x), \qquad (1) \\
&\vdots \\
f^{r-2}(x) &= Q_{r-1} f^{r-1}(x) - p.
\end{aligned}
$$

Aus diesen Formeln folgt nun Nachstehendes:

1) Zwei auf einander folgende Funktionen $f^s(x)$ und $f^{s+1}(x)$ können nicht für denselben Werth von x Null sein. Denn man sieht daraus, daß sonst offenbar auch $f^{s+2}(x)$, also auch $f^{s+3}(x)$ u. s. f. bis p Null sein müßten für denselben Werth von x. Da aber p gar kein x enthält, so kann es nie Null werden, also ist unsere Behauptung gerechtfertigt.

2) Wenn einer dieser Ausdrücke z. B. $f^s(x)$ Null ist für irgend einen Werth von x, so sind für diesen Werth von x die zwei benachbarten von verschiedenen Zeichen. Ist nämlich $f^s(x)=0$, so folgt aus (1):

$$f^{s-1}(x) = -f^{s+1}(x),$$

was den Satz beweist.

Alles Dies gilt auch für f(x) selbst.

§. 3.

Denken wir uns nun in der Reihe von Funktionen:

$$f(x),\ f_1(x),\ f^2(x),\ \ldots,\ f^{r-1}(x),\ p, \qquad (2)$$

für x eine bestimmte (reelle) Zahl a gesetzt, so erhält man eine Reihe von Werthen, die von bestimmten Vorzeichen (+ oder —) sind. Sagen wir, zwei dieser Funktionen bilden alsdann einen **Zeichenwechsel**, wenn sie verschiedene Vorzeichen, eine **Zeichenfolge**, wenn sie gleiche Vorzeichen haben, so wird man also in der Reihe (2) eine gewisse Anzahl Zeichenwechsel und Zeichenfolgen erhalten.

Setzt man in derselben Reihe einen andern Werth $b(>a)$, so wird nur insofern eine Aenderung in der Anzahl der Wechsel und Folgen eingetreten sein, als einer oder mehrere der Ausdrücke (2) ihr Zeichen geändert haben, d. h. in dem Zwischenraume zwischen a und b einmal, oder mehr, zu Null werden konnten.

Gesetzt nun, f(x) habe sein Zeichen gewechselt, d. h. f(a) und f(b) seien von verschiedenem Vorzeichen. Es gibt somit mindestens **einen** (reellen) Werth von x, der x' heißen mag, zwischen a und b, für den f(x) zu Null wird (§. 7 des vor. Abschn.). Alsdann aber ist $f_1(x)$

nicht Null für $x=x'$ (§. 2, Nr. 1). Man wird also u so klein annehmen können, daß $f_1(x'-u)$ und $f_1(x'+u)$ von gleichem Zeichen sind, d. h. daß $f_1(x)$ dasselbe Vorzeichen hat für alle Werthe von x, von $x'-u$ bis $x'+u$.

Nun ist (§. 10 (22)):

$$f(x'+u) = f(x')+uf_1(x')+\frac{u^2}{1.2}f_2(x')+\ldots$$
$$= uf_1(x')+\frac{u^2}{1.2}f_2(x')+\ldots$$
$$f(x'-u) = -uf_1(x')+\frac{u^2}{1.2}f_2(x')-\ldots, \quad (3)$$

da $f(x')=0$ ist. In den Formeln (3) wird man aber u immer klein genug annehmen können, daß das Zeichen des ersten Gliedes der zweiten Seite zugleich das der ganzen Seite ist (§. 2 des vor. Abschn.).

Da u positiv ist, so wird also $f(x'+u)$ von gleichem Zeichen mit $f_1(x')$, $f(x'-u)$ von verschiedenem Zeichen mit $f_1(x')$ sein. Da aber $f_1(x'-u)$, $f_1(x')$, $f_1(x'+u)$ von gleichem Zeichen sind, so folgt daraus, daß:

für $x=x'-u$, $f(x)$ und $f_1(x)$ von verschiedenem,
für $x=x'+u$, $f(x)$ und $f_1(x)$ von gleichem

Vorzeichen sind, wenn u gehörig klein.

Läßt man also x wachsen von $x'-u$ bis $x'+u$, wobei $f(x)$ durch Null geht, so geht zwischen $f(x)$ und $f_1(x)$ ein Zeichenwechsel verloren, der sich in eine Zeichenfolge verwandelt. Immer aber besteht zwischen $f(x)$ und $f_1(x)$ ein Zeichenwechsel, sobald sich x einer reellen Wurzel der Gleichung $f(x)=0$ nähert.

Gesetzt nun, ein anderer der Ausdrücke (2) z. B. $f^s(x)$, wo $s \geqq 1$, wechsle sein Zeichen für $x=x''$. Da dann $f^{s-1}(x)$ *) und $f^{s+1}(x)$ von verschiedenem Vorzeichen sind, aber keines von ihnen zu Null werden kann für $x=x''$ (§. 2), so wird man also u wieder so wählen können, daß sowohl $f^{s-1}(x''-u)$ und $f^{s-1}(x''+u)$, als auch $f^{s+1}(x''-u)$ und $f^{s+1}(x''+u)$ von gleichem Zeichen sind, d. h. daß $f^{s-1}(x)$ und $f^{s+1}(x)$ ihr Zeichen nicht wechseln für alle Werthe von x, von $x''-u$ bis $x''+u$. Daraus folgt, daß man nach wie vor einen Zeichenwechsel und eine Zeichenfolge haben wird, so daß weder ein Zeichenwechsel verloren geht, noch einer gewonnen wird. Man wird sich davon leicht überzeugen, wenn man folgende Formen beachtet:

---

*) Für $s=1$ wäre $f^{s-1}(x)=f(x)$; eben so ist $f^1(x)=f_1(x)$.

$f^{s-1}(x''-u)$,	$f^s(x''-u)$,	$f^{s+1}(x''-u)$,
+	+	−
−	+	+
+	−	−
−	−	+

$f^{s-1}(x''+u)$,	$f^s(x''+u)$,	$f^{s+1}(x''+u)$.
+	−	−
−	−	+
+	+	−
−	+	+

§. 4.

Wenn man also in der Reihe (2) $x=a$ setzt, so erhält man eine Reihe von Zeichen (+ und −), die eine bestimmte Anzahl Wechsel und Folgen bilden. Läßt man nun x stetig zunehmen, so wird jedesmal $f(x)$ Null werden, wenn man einen Werth von x erreicht hat, der reelle Wurzel von $f(x)=0$ ist. Bei diesem beständigen Wachsen des x werden die in (2) vorkommenden Ausdrücke häufig ihr Zeichen wechseln, so daß die Reihe der Zeichen oft eine andere Gestalt annehmen kann. Wechselt nun $f(x)$ sein Zeichen, so geht jedesmal ein Zeichenwechsel in der ganzen Reihe verloren, so daß sie nachher einen solchen Wechsel weniger hat. Derselbe ersetzt sich nicht wieder, wie auch die andern Funktionen ihre Zeichen wechseln mögen. Der Zeichenwechsel dieser andern Funktionen hat keinen andern Erfolg als den, die Gestalt der Zeichenreihe umzuändern der Art, daß die Zeichenfolge, die zwischen $f(x)$ und $f_1(x)$ bestand, nach dem Durchgange des x durch die Wurzel der Gleichung $f(x)=0$, sich umwandelt in einen Zeichenwechsel, noch ehe x eine zweite Wurzel erreicht. Diese andern Funktionen schieben also nur die Zeichenwechsel immer gegen den Anfang der Reihe hin, ohne selbst die Zahl der Zeichenwechsel zu vermehren oder zu vermindern. Daraus folgt, daß wenn x den Werth $b(>a)$ erreicht hat, genau eben so viele Zeichenwechsel verloren gegangen sein werden, als reelle Wurzeln zwischen a und b liegen.

Zählt man also die Anzahl der Zeichenwechsel in den Reihen

$$f(a),\ f_1(a),\ f^2(a),\ \ldots,\ p,$$
$$f(b),\ f_1(b),\ f^2(b),\ \ldots\ p \qquad (4)$$

und hat die erste Reihe m Zeichenwechsel mehr als die zweite, so liegen m reelle Wurzeln der Gleichung $f(x)=0$ zwischen a und b.

Verschwindet einer der Ausdrücke $f_1(x)$, $f^2(x)$, ... für $x=a$ oder $x=b$, so kann man ihn mit dem Zeichen + oder − nehmen. Wie man ihn auch nehme, so wird man, da die zwei benachbarten von verschiedenen Zeichen sind (§. 2) immer nur einen Zeichen-

wechsel haben, gerade so, als wenn man diesen Ausdruck weggelassen hätte, was man also auch thun kann.

Ist einer dieser Ausdrücke, z. B. $f^s(x)$ so beschaffen, daß er sein Zeichen nicht ändern kann für alle Werthe von x zwischen a und b, so kann man die Reihen (4) mit ihm aufhören lassen. Da derselbe nämlich sein Zeichen nicht ändert, so wird er unfähig dazu sein, einen Zeichenwechsel gegen den Anfang vorzuschieben; alle Zeichenwechsel, die also nach diesem Gliede kommen, bleiben fortwährend nach demselben, haben somit keinen Einfluß auf den Unterschied m. Die Anzahl der Zeichenwechsel in der Reihe

$$f^s(a), f^{s+1}(a), \ldots . p$$

ist nämlich dieselbe, wie die in der Reihe

$$f^s(b), f^{s+1}(b), \ldots . p.$$

Denn man lasse in der Reihe

$$f^s(x), f^{s+1}(x), \ldots . p$$

x wachsen von a bis b, so wird das erste Glied sein Zeichen nie ändern, nach der Annahme; wie nun auch die übrigen Glieder ihr Zeichen ändern, so geht nie ein Wechsel verloren, oder wird einer gewonnen (§. 3), die Anzahl der Zeichenwechsel bleibt also dieselbe. Zeichenwechsel könnten nur dann verloren gehen, wenn das erste Glied $f^s(x)$ sein Zeichen wechselte. Dies rechtfertigt obige Behauptung.

Wenn f(a) selbst Null, so könnte man sich x von a+u aus wachsend denken. Da aber für x=a+u: f(x) und $f_1(x)$ von gleichem Zeichen sind, so hat man dieselbe Anzahl Zeichenwechsel in der ersten Reihe (4), wenn man das erste Glied wegläßt, oder wenn man x=a+u für x setzt. Hat also die erste Reihe, in diesem Falle, n Zeichenwechsel mehr als die zweite, so sind von a bis b jetzt n+1 reelle Wurzeln, wenn man a mitzählt.

Ist f(b) Null, so lasse man x wachsen bis b+u. Da für x=b+u: f(x) und $f_1(x)$ von gleichem Zeichen sind (da b Wurzel der Gleichung), so kann man in der zweiten Reihe (4) f(b) weglassen und hat doch dieselbe Anzahl Zeichenwechsel, wie wenn man x=b+u setzt. In diesem Falle hat die Gleichung f(x)=0 n Wurzeln von a bis b, b mit eingerechnet, wenn n dieselbe Bedeutung hat, wie so eben.

Sind f(a) und f(b) zugleich Null, so läßt man beide weg; hat dann die erste Reihe n Zeichenwechsel mehr als die zweite, so hat die Gleichung n+1 reelle Wurzeln von a bis b, wenn a und b mitgerechnet werden.

§. 5.

Untersuchen wir nun den Fall, da $f^r(x)$ (§. 1) nicht bloß eine Zahl ist, sondern x enthält. In diesem Falle haben f(x) und $f_1(x)$

den größten gemeinschaftlichen Theiler $f^r(x)$ (§. 11 des vor. Absch.), also $f(x)$ gleiche Wurzeln (§. 10 des vor. Abschn.). Setzt man aber

$$\frac{f(x)}{f^r(x)} = F(x), \frac{f_1(x)}{f^r(x)} = F^1(x), \ldots \frac{f^{r-1}(x)}{f^r(x)} = F^{r-1}(x), \quad (5)$$

so erhält man, wie in §. 2 die Gleichungen (1):

$$\begin{aligned} F(x) &= Q_1 F^1(x) - F^2(x), \\ F^1(x) &= Q_2 F^2(x) - F^3(x), \\ F^2(x) &= Q_3 F^3(x) - F^4(x), \quad (6) \\ &\vdots \\ F^{r-2}(x) &= Q_{r-1} F^{r-1}(x) - 1. \end{aligned}$$

$F(x)$ und $F^1(x)$, die nun keinen gemeinschaftlichen Theiler mehr haben, können nicht zu gleicher Zeit, d. h. für denselben Werth von x, zu Null werden.

Sei nun a der Werth von x, der $F(x)$ zu Null macht, so daß für ein kleines u, $F(a-u)$ und $F(a+u)$ von verschiedenem Zeichen sind (§. 7 des vor. Abschn.). Da $F^1(a)$ nicht Null ist, so wird man immer u klein genug annehmen können, daß $F^1(x)$ sein Zeichen nicht ändert von $a-u$ an für x, bis $a+u$.

Ist $f(x) = (x-a)^m (x-b)^s (x-c)^t \ldots (x-k)(x-l) \ldots$, so ist (§. 10 des vor. Abschn.):

$$f^r(x) = (x-a)^{m-1} (x-b)^{s-1} (x-c)^{t-1} \ldots,$$

zugleich nach der dortigen Formel (24):

$$f_1(x) = \frac{mf(x)}{x-a} + \frac{sf(x)}{x-b} + \frac{tf(x)}{x-c} + \ldots + \frac{f(x)}{x-k} + \frac{f(x)}{x-l} + \ldots$$

Sei nun

$$(x-b)^s (x-c)^t \ldots (x-k)(x-l) = X, \text{ also}$$
$$f(x) = (x-a)^m X,$$

so ist

$$f_1(x) = m(x-a)^{m-1} X + \frac{s(x-a)^m X}{x-b} + \ldots .$$

$$= (x-a)^{m-1} \left[mX + \frac{s(x-a)}{x-b} X + \ldots \right] =$$

$$(x-a)^{m-1} \left[mX + (x-a)V \right],$$

wenn

$$V = \frac{sX}{x-b} + \frac{tX}{x-c} + \ldots + \frac{X}{x-k} + \frac{X}{x-l} + \ldots,$$

so daß V nicht Null ist für $x=a$. Demnach ist

$$\frac{f(x)}{f_1(x)} = \frac{(x-a)^m X}{(x-a)^{m-1}[mX+(x-a)V]} =$$

$$\frac{x-a}{m+(x-a)\frac{V}{X}} = \frac{F(x)}{F_1(x)}.$$

Hieraus ergibt sich:

$$\frac{f(a+u)}{f_1(a+u)} = \frac{u}{m+u\frac{V'}{X'}} = \frac{F(a+u)}{F^1(a+u)},$$ V′ und X′ die Werthe

von V und X für $x=a+u$;

d. h. $F(a+u)$ und $F^1(a+u)$ sind von gleichem Zeichen, da ihr Quotient positiv ist, indem ja im Nenner u immer klein genug genommen werden kann, damit $m+u\frac{V'}{X'}$ positiv sei, was auch $\frac{V'}{X'}$ ist.

Deßgleichen ist

$$\frac{f(a-u)}{f_1(a-u)} = \frac{-u}{m-u\frac{V''}{X''}} = \frac{F(a-u)}{F^1(a-u)},$$ V″ und X″ die Werthe

von V und X für $x=a-u$;

also $F(a-u)$ und $F^1(a-u)$ von verschiedenem Zeichen.

Daraus folgt also, daß wenn in der Reihe

$$F(x),\ F^1(x),\ F^2(x),\ \ldots\ 1, \qquad (7)$$

x wächst und eine Wurzel a der Gleichung $F(x)=0$ (oder $f(x)=0$) erreicht, jedesmal ein Zeichenwechsel, der zwischen $F(x)$ und $F^1(x)$ bestund, in eine Zeichenfolge übergeht, also verloren wird.

Da zugleich die beiden Sätze des §. 2 auch hier gelten, so folgt, daß, um die von einander verschiedenen reellen Wurzeln der Gleichung $f(x)=0$ zwischen a und b zu finden, man nur die beiden Reihen:

$$\begin{array}{l} F(a),\ F^1(a),\ F^2(a),\ \ldots,\ F^{r-1}(a),\ 1, \\ F(b),\ F^1(b),\ F^2(b),\ \ldots,\ F^{r-1}(b),\ 1 \end{array} \qquad (8)$$

statt der Reihen (4) zu betrachten hat.

Da aber, wenn $f^r(a)$ und $f^r(b)$ nicht Null sind, die Reihen

$$\begin{array}{l} f(a),\ f_1(a),\ f^2(a),\ \ldots,\ f^r(a), \\ f(b),\ f_1(b),\ f^2(b),\ \ldots,\ f^r(b), \end{array} \qquad (9)$$

indem allgemein $f^s(x)=F^s(x)f^r(x)$, offenbar dieselben Zeichenwechsel

darbieten werden, als die Reihen (8), so wird man, wenn man alles Gesagte endlich zusammenfaßt, folgenden Lehrsatz von Sturm *) erhalten:

§. 6.

Um zu finden, wie viele verschiedene, reelle Wurzeln der Gleichung $f(x)=0$ zwischen a und b liegen $(b>a)$, bilde man die abgeleitete Funktion $f_1(x)$, alsdann dividire man $f_1(x)$ in $f(x)$, bis man zu einem Reste kommt, der von niederem Grade ist, als $f_1(x)$; man wechsle dessen Vorzeichen und er sei alsdann $f^2(x)$. Eben so dividire man $f^2(x)$ in $f_1(x)$, bis zu einem Reste, der von niederem Grade ist als $f^2(x)$; derselbe sei, nachdem seine Zeichen gewechselt worden, $f^3(x)$.

So verfahre man weiter mit $f^3(x)$ und $f^2(x)$, ... bis man zu einem Reste kommt, $f^r(x)$, der (nach gewechselten Zeichen) eine bloße Zahl ist, oder in $f^{r-1}(x)$ genau aufgeht.

In der Reihe

$$f(x),\ f_1(x),\ f^2(x),\ f^3(x),\ \ldots,\ f^r(x) \qquad (10)$$

setze man nun $x=a$ und zähle die Zeichenwechsel, die darin vorkommen, indem man etwa zu Null werdende Glieder wegläßt — diese Anzahl sei m. Deßgleichen setze man $x=b$, und zähle die Zeichenwechsel in der entstehenden Reihe — diese Anzahl sei s, so hat die Gleichung $m-s$ verschiedene reelle Wurzeln zwischen a und b.

Wäre f(a) selbst Null, so hätte sie deren $m-s+1$, wenn a mitgerechnet wird; wäre f(b) Null, deren $m-s$, wenn b mitgerechnet ist; sind f(a) und f(b) zugleich Null, deren $m-s+1$, wenn a und b mitgezählt werden.

Wenn eine der obigen Funktionen z. B. $f^s(x)$ ihr Zeichen zwischen a und b für x nicht ändern kann, so kann man die Reihe mit ihr schließen.

§. 7.

Nach dem so eben ausgesprochenen Satze ist es nun leicht, zu entscheiden, wie viele verschiedene, reelle Wurzeln eine Gleichung überhaupt habe.

Man setzt in der Reihe (10) zuerst $x=-\infty$, wobei man von

*) Sturm hat ihn im 11ten Bande des Bulletin des sciences math., phys. et chim., ohne Beweis, veröffentlicht. Ettingshausen gab im 7ten Bande seiner Zeitschrift für Math. und Physik zuerst einen Beweis dafür.

jeder Funktion nur ihr erstes Glied zu beachten hat*), sodann $x = +\infty$ und zählt die Zeichenwechsel.

Um die Anzahl der positiven, reellen und verschiedenen Wurzeln zu haben, setze man $x=0$ und dann $x = +\infty$ (oder $= \frac{1}{\alpha}$ und lasse α sich der Null unbegränzt nähern). Die Anzahl der negativen findet man, wenn man $x = -\infty$ (d. h. $= -\frac{1}{\alpha}$ und α der Null sich nähernd) und $x=0$ setzt.

Wählen wir Beispiele.

Sei

$$f(x) = x^5 + 3x^4 - 46x^3 - 18x^2 + 621x - 945,$$

also

$$f_1(x) = 5x^4 + 12x^3 - 138x^2 - 36x + 621,$$
$$f_2(x) = 20x^3 + 36x^2 - 276x - 36,$$
$$f_3(x) = 60x^2 + 72x - 276,$$
$$f_4(x) = 120x + 72,$$
$$f_5(x) = 120.$$

Um die Größen $f^2(x)$, $f^3(x)$, ... zu bestimmen, hat man die in §. 11 des vorigen Abschnitts auseinandergesetzte Methode anzuwenden. Um sie auch durch dieses Beispiel zu erläutern, mag die ausführliche Rechnung hier ihren Platz finden:

---

*) Hat man einen Ausdruck $ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \ldots + k$ und setzt $x=\infty$, so wird er das Zeichen seines ersten Gliedes haben. Denn sei $x = \frac{1}{\alpha}$, so ist derselbe: $\frac{1}{\alpha^n}(a + b\alpha + c\alpha^2 + \ldots + k\alpha^n)$ und läßt man nun α unbegränzt abnehmen, so wird die Größe innerhalb der Klammern a sich nähern, also das Ganze der Größe $\frac{a}{\alpha^n}$, d. h. $a . \infty^n$, wenn ∞ eine unbegränzt wachsende Zahl bedeutet. Deßgleichen für $x = -\frac{1}{\alpha}$, ist $x = -\infty$, wenn α der Null unbegränzt nahe kommt und obiger Ausdruck wird zu $\frac{a}{(-\alpha)^n} = \pm \frac{a}{\alpha^n}$, je nachdem, ob n gerade oder ungerade.

$$\begin{array}{l|l}
x^5+\ 3x^4-\ 46x^3-\ 18x^2+\ 621x-\ 945 & 5x^4+12x^3-138x^2-36x+621 \\
5x^5+15x^4-230x^3-\ 90x^2+3105x-4725 & x+3 \\
5x^5+12x^4-138x^3-\ 36x^2+\ 621x & \\
\hline
\quad 3x^4-\ 92x^3-\ 54x^2+\ 2484x-\ 4725 & \\
\quad 15x^4-460x^3-270x^2+12420x-23625 & \\
\quad 15x^4+\ 36x^3-414x^2-\ 108x+\ 1863 & \\
\hline
\quad -496x^3+144x^2+12528x-25488 & \\
\quad -\ 31x^3+\ 9x^2+\ 783x-\ 1593 &
\end{array}$$

also $f^2(x)=31x^3-9x^2-783x+1593$.

$$\begin{array}{l|l}
5x^4+\ 12x^3-\ 138x^2-\ 36x+\ 621 & 31x^3-9x^2-783x+1593 \\
 & 5x+417 \\
155x^4+372x^3-4278x^2-1116x+19251 & \\
155x^4-\ 45x^3-3915x^2+\ 7965x & \\
\hline
\quad 417x^3-\ 363x^2-9081x+19251 & \\
\quad 12927x^3-11253x^2-281511x+596781 & \\
\quad 12927x^3-\ 3753x^2-326511x+664281 & \\
\hline
\qquad -\ 7500x^2+\ 45000x-\ 67500 & \\
\qquad -x^2+6x-9 &
\end{array}$$

also $f^3(x)=x^2-6x+9$.

$$\begin{array}{r|l} 31x^3 - 9x^2 - 783x + 1593 & x^2 - 6x + 9 \\ \underline{31x^3 - 186x^2 + 279x} & \overline{31x + 177} \\ 177x^2 - 1062x + 1593 & \\ \underline{177x^2 - 1062x + 1593} & \\ 0 & \end{array}$$

Demnach

$$f(x) = x^5 + 3x^4 - 46x^3 - 18x^2 + 621x - 945,$$
$$f_1(x) = 5x^4 + 12x^3 - 138x^2 - 36x + 621,$$
$$f^2(x) = 31x^3 - 9x^2 - 783x + 1593,$$
$$f^3(x) = x^2 - 6x + 9.$$

Die Gleichung $f(x)=0$ hat also gleiche Wurzeln.

Sei nun $x = -\infty$, so erhält man folgende Zeichenreihe: $- + - +$, also 3 Zeichenwechsel,

Sei dann $x = +\infty$, so erhält man folgende Zeichenreihe: $++++$, also 0 Zeichenwechsel.

Die Gleichung $f(x)=0$ hat also drei verschiedene reelle Wurzeln.

Für $x=0$ und $+\infty$, erhält man die Zeichenreihen:

$- + + +, + + + +,$

also hat die Gleichung nur eine positive, reelle Wurzel, mithin zwei negative.

Für $x=0$ und $x=5$:

$- + + +, + + + +,$

also liegt sie zwischen 0 und 5;

für $x=0$ und $x=1$:

$- + + +, - + + +,$ also nicht zwischen 0 und 1;

für 1 und 2:

$- + + +, - + + +,$ ebenfalls nicht zwischen 1 und 2;

für $x=3$ findet man $f(x)=0$, also ist 3 die reelle positive Wurzel.

Da $f_1(3)=0$, $f_2(3)=0$, $f_3(3)=480$, so ist 3 dreimal Wurzel von $f(x)=0$.

Eben so findet man die andern zwei Wurzeln: -5 und -7.

§. 8.

Es läßt sich hierauf eine einfache Art der Bestimmung der reellen Wurzeln einer vorgelegten Gleichung gründen.

Man suche nämlich die Wurzeln der Gleichung zu trennen, d. h. nach der so eben gezeigten Weise zu bestimmen, ob eine (oder mehrere) Wurzeln zwischen den zwei ganzen Zahlen b und b+1 liegen. Nun setze man $x = b + \frac{1}{z}$ und bilde die neue Gleichung in z. Lag nur eine

Wurzel zwischen b und $b+1$ (und wir wollen im Augenblick bloß die positiven Wurzeln beachten), so hat z nur einen reellen, positiven Werth >1. Setzt man also für z die Reihe ganzer, positiver Zahlen, so erhält man einmal einen Zeichenwechsel, und weiß also, daß z zwischen c und $c+1$ liegt. Nun setze man $z=c+\frac{1}{y}$ und verfahre eben so u. s. w.

Waren mehrere (positive) Wurzeln zwischen b und $b+1$, so hat die Gleichung in z mehrere reelle Wurzeln, die man nun wieder zu trennen sucht u. s. w.

Um die negativen Wurzeln der Gleichung $f(x)=0$ zu bestimmen, setze man $x=-z$ und bestimme jetzt nur die positiven Wurzeln der Gleichung in z, so werden dieselben, mit dem Zeichen — genommen, die verlangten negativen Wurzeln sein.

Wählen wir ein Beispiel.

Sei

$$x^3-7x+7=0.$$

Hier ist

$$f(x)=x^3-7x+7,$$
$$f_1(x)=3x^2-7,$$
$$f^2(x)=2x-3,$$
$$f^3(x)=1$$

für $x=0$, $x=+\infty$: $+--+$, $++++$, die Gleichung hat zwei positive Wurzeln.

Für $x=-\infty$, $x=0$: $-+-+$, $+--+$, die Gleichung hat eine negative Wurzel.

Für $x=1$, $x=2$: $+--+$, $++++$, beide liegen zwischen 1 und 2.

$x=1+\frac{1}{z}$ gibt, wenn man mit z^3 multiplizirt:

$$z^3-4z^2+3z+1=0.$$

Setzt man hier nach einander 1, 2, 3 für z, so erhält man: $+1$, -1, $+1$, also liegt ein Werth von z zwischen 1 und 2, der andere zwischen 2 und 3.

Demnach erstens:

$$z=1+\frac{1}{y} \text{ gibt } y^3-2y^2-y+1=0.$$

Setzt man $y=2, 3$, so bekommt man $-1, +7$. Die positive Wurzel dieser Gleichung liegt zwischen 2 und 3, folglich

$$y=2+\frac{1}{y'}, \text{ woraus } y'^3-3y'^2-4y'-1=0.$$

Da für $y'=4, 5$ man hat: $-1, +29$, so liegt der positive Werth

von y' zwischen 4 und 5; demnach $y' = 4 + \frac{1}{y''}$, wo man dann findet, daß y'' zwischen 20 und 21 liegt . . . . Man erhält so:

$$x = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{20 + \cfrac{1}{\ddots}}}}}$$

Ganz eben so findet sich der zweite Werth:

$$x = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{20 + \cfrac{1}{\ddots}}}}}$$

Was die negative Wurzel anbelangt, so setze man $x = -z$, wodurch man die Gleichung

$$z^3 - 7z - 7 = 0$$

erhält, die nur eine positive Wurzel hat, die sich nun ganz eben so bestimmen läßt.

Man hat bei dieser, hier kurz angedeuteten Methode den Vortheil, daß man immer eine Gränze des Fehlers hat, wie man dies aus der Lehre von den Kettenbrüchen kennt.

§. 9.

Um bei dieser, oder jeder andern Methode unnützen Versuchen zu entgehen, ist es nützlich, die Gränzen zu kennen, innerhalb welcher die reellen Wurzeln einer Gleichung liegen.

Sei wieder $f(x) = 0$ die vorgelegte Gleichung; seien zugleich von Anfang her r positive Glieder, ehe ein negatives kommt*), so daß etwa:

$$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{r-1} x^{n-r+1} - a_r x^{n-r} \ldots \pm a_n.$$

*) Ist gar kein negatives Glied in $f(x)$, so hat $f(x) = 0$ keine positive Wurzel. Denn wäre a eine solche, so kann man u klein genug wählen, daß zwischen $a - u$ und $a + u$ nicht noch eine zweite Wurzel liegt; alsdann müßten $f(a - u)$ und $f(a + u)$ von verschiedenem Zeichen sein (§. 7 des vor. Abschn.). Da aber $a - u$ und $a + u$ positiv sind, so sind $f(a - u)$ und $f(a + u)$ positiv, also liegt keine positive Wurzel zwischen $a - u$ und $a + u$. In diesem Falle ist 0 die obere Gränze der positiven Wurzeln.

Sei a_s der größte negative Koeffizient, seinem absoluten Werthe nach. Nun ist klar, daß jeder Werth von x, der

$$x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{r-1}x^{n-r+1}-a_s(x^{n-r}+x^{n-r-1}+\ldots+1)$$

positiv macht, auch f(x) positiv machen wird.

Dieser Bedingung leistet aber ein Werth von x Genüge, für den

$$x^n>a_s(x^{n-r}+\ldots+1),\text{ d. h. }>a_s\frac{(x^{n-r+1}-1)}{x-1}.$$

Ist nun $x>1$, so genügt hiezu, daß

$$x^n>\frac{a_sx^{n-r+1}}{x-1},\text{ d. h. }(x-1)x^{r-1}>a_s.$$

Setzt man $(x-1)(x-1)^{r-1}=a_s$ oder $x=1+\sqrt[r]{a_s}$, wo nun $x>1$, so ist offenbar $(x-1)x^{r-1}=\sqrt[r]{a_s}.(1+\sqrt[r]{a_s})^{r-1}>\sqrt[r]{a_s}.(\sqrt[r]{a_s})^{r-1}$, d. h. $>a_s$.

Daraus folgt also, daß ein jeder Werth von x, der $>1+\sqrt[r]{a_s}$, f(x) positiv macht, da für $x>c$, wenn $c=1+\sqrt[r]{a_s}$:

$$(x-1)x^{r-1}>a_s,\text{ also }x^{r-1}>\frac{a_s}{x-1},\ x^n>\frac{a_sx^{n-r+1}}{x-1}\text{ und also}$$

$$\text{auch }x^n>\frac{a_s(x^{n-r+1}-1)}{x-1},$$

d. h.

$$x^n>a_s(x^{n-r}+\ldots\ldots+1)$$

und folglich auch

$$f(x)=x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{r-1}x^{n-r+1}-a_sx^{n-r}\ldots\pm a_n>0.$$

Demnach wird f(x) sein Zeichen nicht mehr wechseln, wenn $x>1+\sqrt[r]{a_s}$, d. h. $1+\sqrt[r]{a_s}$ ist eine obere Gränze der positiven Wurzeln.

Um eine untere Gränze der positiven Wurzeln zu finden, setze man $x=\frac{1}{z}$, bilde nun die Gleichung in z und suche die obere Gränze der positiven Wurzeln dieser Gleichung; ist dieselbe c, so ist $\frac{1}{c}$ die untere Gränze der positiven Wurzeln der vorgelegten Gleichung.

Um die Gränzen der negativen Wurzeln zu finden, setze man $x=-z$ und suche nun in dieser Gleichung die obere und untere Gränze der positiven Wurzeln; mit dem — Zeichen genommen, sind dies dann die Gränzen der negativen Wurzeln.

Z. B. die Gleichung:

$$x^4+3x^3-5x^2+6x-9=0$$

hat keine positive Wurzel über $1+\sqrt[2]{9}$ oder 4.

Setzt man $x=\frac{1}{z}$, so findet sich

$$9z^4-6z^3+5z^2-3z-1=0$$

oder

$$z^4-\frac{2}{3}z^3+\frac{5}{9}z^2-\frac{1}{3}z-\frac{1}{9}=0,$$

also hat dieselbe keine positive Wurzel über $1+\sqrt[1]{\frac{2}{3}}$, d. h. über $\frac{5}{3}$, da $\sqrt[1]{\frac{2}{3}}=\frac{2}{3}$, d. h. die vorgelegte hat keine positive Wurzel unter $\frac{3}{5}$.

Setzt man $x=-z$, so findet sich

$$z^4-3z^3-5z^2-6z-9=0.$$

Diese Gleichung hat keine positive Wurzel über $1+\sqrt[1]{9}$ oder 10. Setzt man in ihr $z=\frac{1}{v}$:

$$9v^4+6v^3+5v^2+3v-1=0, \text{ oder } v^4+\frac{2}{3}v^3+\frac{5}{9}v^2+\frac{1}{3}v-\frac{1}{9}=0,$$

und diese hat keine positive Wurzel über $1+\sqrt[4]{\frac{1}{9}}=1+\sqrt{\frac{1}{3}}=1{\cdot}57735$, also obige Gleichung in z keine unter $\frac{1}{1{\cdot}57735}=0{\cdot}63397$.

Demnach hat die vorgelegte Gleichung keine negative Wurzel unter -10 und keine über $-0{\cdot}63397$.

Wollte man in dem Beispiele des §. 7 die Gränzen bestimmen, so wäre die oberste Gränze der positiven Wurzeln: $1+\sqrt{945}<32$, d. h. keine positive ist über 32.

Für die weitere Gränze, wenn man $x=\frac{1}{z}$ setzt und erhält:

$$z^5-\frac{621}{945}z^4+\frac{18}{945}z^3+\frac{46}{945}z^2-\frac{3}{945}z-\frac{1}{945}=0$$

ergibt sich

$$\frac{1}{1+\frac{621}{945}} = \frac{945}{1566} = \frac{35}{58}.$$

Was die Gränzen der negativen Wurzeln anbelangt, so ist für $x = -z$:

$$z^5-3z^4-46z^3+18z^2+621z+945=0,$$

woraus für die Gränzen der negativen Wurzeln folgt: -47 und

$$\frac{-1}{1+\sqrt[3]{\frac{46}{945}}}.^{*)}$$

Faßt man alles bis jetzt Gesagte zusammen, so wird man die reellen Wurzeln einer jeden Gleichung zu bestimmen im Stande sein.

---

*) Eine andere Bestimmungsart der obern Gränze positiver Wurzeln (die genügend ist) ergibt sich so: Man dividire den Zahlwerth jedes negativen Koeffizienten durch die Summe aller vorhergehenden positiven, und wähle unter diesen Quotienten den größten aus. Dieser, um 1 vermehrt, ist eine obere Gränze.

Wir wollen die Richtigkeit dieses Satzes an folgendem Beispiel nachweisen, was vollkommen hinreichend sein wird. Sei $f(x)=2x^6+7x^5-14x^4-18x^3+12x^2-7x-5$, so ist, wenn man (Seite 16) bemerkt, daß

$$\frac{x^r-1}{x-1}=x^{r-1}+x^{r-2}+\ldots+1,\ x^r=(x-1)[x^{r-1}+\ldots+1]+1:$$

$$2x^6=2(x-1)x^5+2(x-1)x^4+2(x-1)x^3+2(x-1)x^2+2(x-1)x+2(x-1)+2$$

$$7x^5=7(x-1)x^4+7(x-1)x^3+7(x-1)x^2+7(x-1)x+7(x-1)+7$$

$$12x^2=12(x-1)x+12(x-1)+12$$

$$2x^6+7x^5+12x^2=2(x-1)x^5+(2+7)(x-1)x^4+(7+2)(x-1)x^3+(7+2)(x-1)x^3+(2+7+12)(x-1)x+(2+7+12)(x-1)+2+7+12,$$

$$-14x^4-18x^3-7x-5=-14x^4-18x^3-7x-5.$$

Ist nun

$$(2+7)(x-1)>14,\ \text{d. h. } x>\frac{14}{2+7}+1;\ (2+7)(x-1)>18,$$

$$x>\frac{18}{2+7}+1;\ (2+7+12)(x-1)>7,\ x>\frac{7}{2+7+12}+1;$$

$$(2+7+12)(x-1)>5,\ x>\frac{5}{2+7+12}+1,$$

so ist, für jeden höhern Werth von x, f(x) fortwährend positiv, d. h. man hat eine obere Gränze gefunden. Es werden aber alle genannten Ungleichungen erfüllt sein, wenn $x>\frac{18}{2+7}+1$, d. h. >3, so daß 3 eine obere Gränze ist.

Für $f(x)=x^4+3x^3-5x^2+6x-9$ sind die Quotienten: $\frac{5}{1+3}=\frac{5}{4}$, $\frac{9}{1+3+6}=\frac{9}{10}$, also muß $x>\frac{5}{4}+1$, d. h. $>2{\cdot}25$ sein.

Da aber diese Bestimmungsweise immerhin mit vielen Schwierigkeiten verbunden ist, so ist eine, für den praktischen Rechner bequemere Methode höchst wünschenswerth. Wir wollen im folgenden Abschnitte die Methode, die Horner zu diesem Ende angegeben hat, auseinander setzen, da sie uns als eine der einfachsten zu diesem Zwecke erscheint.

Sechster Abschnitt.

Bestimmung der reellen Wurzeln einer Gleichung.

§. 1.

Die Horner'sche Methode der Wurzelbestimmung kommt darauf hinaus, aus der gegebenen Gleichung nach einander andere Gleichungen zu bilden, deren Wurzeln um ein Bestimmtes kleiner seien, als die Wurzeln der gegebenen Gleichung. Wir wollen deßhalb zuerst den Rechnungs-Mechanismus erläutern, der dazu dient.

Sei

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \;.\;.\;.\;.\; + a_n$$

und man stelle die Aufgabe, die Größe $f(x)$ durch $x - \alpha$ zu dividiren. Man hat:

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \;.\;.\;.\; + a_n \;\big|\; x - \alpha$$

$$\underline{a_0x^n - a_0\alpha x^{n-1}} \;\big|\; \underset{A_0}{a_0}x^{n-1} + \underset{A_1}{(A_0\alpha + a_1)}x^{n-2} + \underset{A_2}{(A_1\alpha + a_2)}x^{n-} + \underset{A_3}{(A_2\alpha + a_3)}x^{n-4} + \;.\;.\;.$$

$$(a_0\alpha + a_1)x^{n-1} + a_2x^{n-2}$$

$$\underline{(A_0\alpha + a_1)x^{n-1} - A_1\alpha x^{n-2}}$$

$$(A_1\alpha + a_2)x^{n-2} + a_3x^{n-3}$$

$$\underline{(A_1\alpha + a_2)x^{n-2} - A_2\alpha x^{n-3}}$$

$$(A_2\alpha + a_3)x^{n-3} + a_4x^{n-4}$$

so daß der Quotient:

$$A_0x^{n-1} + A_1x^{n-2} + A_2x^{n-3} + \;.\;.\;.\; + A_{n-1}$$ und der Rest A_n ist. Daraus folgt:

$$f(x) = (x - \alpha)\,(A_0x^{n-1} + A_1x^{n-2} + \;.\;.\;.\; + A_{n-1}) + A_n.$$

Die Bildungsweise der Koeffizienten $A_0, A_1, \ldots A_n$ ist sehr leicht.

$A_0 = a_0$. A_1 wird erhalten, wenn man A_0 mit α multiplizirt und a_1 addirt; A_2, wenn man A_1 mit α multiplizirt und a_2 addirt, . . . A_n, wenn man A_{n-1} mit α multiplizirt und a_n addirt. Man wird dies am besten so thun, daß man $a_0, a_1, \ldots a_n$ in eine Horizontalreihe schreibt, und dann multiplizirt und addirt, etwa so:

$$\begin{array}{c|ccccccc} & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \;\ldots\; & a_n \\ \alpha & & A_0\alpha & A_1\alpha & A_2\alpha & A_3\alpha & A_4\alpha & A_{n-1}\alpha \\ \hline & A_0 & A_1 & A_2 & A_3 & A_4 & A_5 & A_n \end{array}$$

Sei z. B.

$5x^6 - 12x^5 + 3x^4 - 2x^3 + x - 14$ durch $x - 2$ zu dividiren:

$$\begin{array}{c|ccccccc} & 5 & -12 & +3 & -2 & 0 & +1 & -14 \\ 2 & & 10 & -4 & -2 & -8 & -16 & -30 \\ \hline & 5 & -2 & -1 & -4 & -8 & -15 & -44 \end{array}$$

also ist der Quotient $5x^5 - 2x^4 - x^3 - 4x^2 - 8x - 15$, der Rest -44, so daß

$$5x^6 - 12x^5 + 3x^4 - 2x^3 + x - 14 = (x-2)(5x^5 - 2x^4 - x^3 - 4x^2 - 8x - 15) - 44.$$

Mit dem Quotienten $A_0 x^{n-1} + \ldots + A_{n-1}$ kann man ganz wieder so verfahren, indem man ihn mit $x - \alpha$ dividirt und erhält:

$$A_0 x^{n-1} + \ldots + A_{n-1} = (x-\alpha)(B_0 x^{n-2} + \ldots + B_{n-2}) + B_{n-1},$$

wo B_{n-1} jetzt der Rest ist, $B_0, B_1, \ldots B_{n-1}$ werden aus $A_0, A_1, \ldots A_{n-1}$ gebildet, wie diese aus $a_0, \ldots a_n$. Mit dem neuen Quotienten kann man wieder so fortfahren u. s. w., so daß man nach einander erhält:

$$\begin{aligned} a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n &= (x-\alpha)[A_0 x^{n-1} + \ldots + A_{n-1}] + A_n \\ &= (x-\alpha)^2 [B_0 x^{n-2} + \ldots + B_{n-2}] + B_{n-1}(x-\alpha) \\ &\quad + A_n \\ &= (x-\alpha)^3 [C_0 x^{n-3} + \ldots + C_{n-3}] + C_{n-2}(x-\alpha)^2 \\ &\quad + B_{n-1}(x-\alpha) + A_n \\ &= \ldots \\ &\;\vdots \\ &= (x-\alpha)^n Q_0 + P_1 (x-\alpha)^{n-1} + L_2 (x-\alpha)^{n-2} + \ldots \\ &\quad + B_{n-1}(x-\alpha) + A_n, \end{aligned}$$

wo $A_n, B_{n-1}, \ldots Q_0$ die auf einander folgenden Reste sind.

Das Gesetz der Bildung ist in folgendem Schema ausgesprochen:

$$\begin{array}{cccccc} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \ldots\ldots & a_n \\ \| & A_0\alpha & A_1\alpha & A_2\alpha & & A_{n-1}\alpha \\ \hline A_0 & A_1 & A_2 & A_3 & & A_n \\ \| & B_0\alpha & B_1\alpha & B_2\alpha & B_{n-2}\alpha & \\ \hline B_0 & B_1 & B_2 & B_3 \;\ldots & B_{n-1} & \\ \| & C_0\alpha & C_1\alpha & C_2\alpha & C_{n-3}\alpha & \\ \hline C_0 & C_1 & C_2 & C_3 \;\ldots & C_{n-2} & \\ \vdots & & & & & \end{array} \qquad (1)$$

$$\begin{array}{ll} & P_0\alpha \\ \hline P_0 & P_1 \end{array}$$
$Q_0 = a_0$,
worin A_n, B_{n-1}, C_{n-2}, ... Q_0 nun die Reste sind.

Achtet man nun auf den Ausdruck
$$Q_0(x-\alpha)^n + P_1(x-\alpha)^{n-1} + \ldots + B_{n-1}(x-\alpha) + A_n = f(x)$$
so ist klar, daß wenn man $x-\alpha=z$ setzt und
$$\varphi(z) = Q_0 z^n + P_1 z^{n-1} + \ldots + B_{n-1}z + A_n = f(\alpha+z)$$
die Wurzeln der Gleichung $\varphi(z)=0$ durchgängig um α kleiner sind, als die von $f(x)=0$. Denn man stelle uns die Aufgabe, aus $f(x)=0$ eine neue Gleichung zu bilden, deren Wurzeln um α kleiner seien, als die dieser Gleichung, so muß, wenn z eine Wurzel der neuen Gleichung ist, $z=x-\alpha$, also $x=\alpha+z$ sein. Da nun
$$f(x) = Q_0(x-\alpha)^n + P_1(x-\alpha)^{n-1} + \ldots + B_{n-1}(x-\alpha) + A_n,$$
so ist also die Gleichung in z:
$$f(\alpha+z) = Q_0 z^n + P_1 z^{n-1} + \ldots + B_{n-1}z + A_n,$$
was obige Behauptung rechtfertigt. Wir können also auch sagen: Hat man die zwei Gleichungen
$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0$$
und
$$a_0x^n + P_1x^{n-1} + \ldots + B_{n-1}x + A_n = 0,$$
so hat die zweite durchgängig die um α verkleinerten Wurzeln der ersten.

Sei uns die Aufgabe gestellt, aus
$$x^4 + 9x^3 - 26x^2 - 14x + 12 = 0$$
eine neue Gleichung zu bilden, deren Wurzeln um 3 kleiner seien, als die der vorgelegten.

Nach dem Schema (1) hat man:
$$\begin{array}{r|rrrrr}
 & 1 & 9 & -26 & -14 & 12 \\
3 & & 3 & 36 & 30 & 48 \\ \hline
 & 1 & 12 & +10 & +16 & 60 \\
 & & 3 & 45 & 165 & \\ \hline
 & 1 & 15 & 55 & 181 & \\
 & & 3 & 54 & & \\ \hline
 & 1 & 18 & 109 & & \\
 & & 3 & & & \\ \hline
 & 1 & 21 & & & \\ \hline
 & 1 & & & &
\end{array}$$
also die neue Gleichung:
$$x^4 + 21x^3 + 109x^2 + 181x + 60 = 0.$$

Seien in
$3x^5 - 12x^4 + 6x - 15 = 0$ die Wurzeln um 2 zu vermindern.

	3	−12	0	0	6	15
2		6	−12	−24	−48	−84
	3	−6	−12	−24	−42	−99
		6	0	−24	−96	
	3	0	−12	−48	−138	
		6	12	0		
	3	6	0	−48		
		6	24			
	3	12	24			
		6				
	3	18				
	3					

also die neue Gleichung: $3x^5+18x^4+24x^3-48x^2-138x-99=0.$

§. 2.

Weiß man nun, daß eine gegebene Gleichung $f(x)=0$ eine positive Wurzel zwischen a und $a+1$ habe, so bilde man aus $f(x)$ eine neue Gleichung $\varphi(x)=0$, deren Wurzeln um a kleiner sind, als die der vorgelegten. Diese Gleichung $\varphi(x)=0$ hat nun jedenfalls eine positive Wurzel zwischen 0 und 1. Gesetzt man finde, daß sie zwischen 0·5 und 0·6 liege, so bilde man aus $\varphi(x)=0$ eine neue Gleichung, deren Wurzeln um 0·5 kleiner seien, also um $a+0{\cdot}5$ kleiner, als die von $f(x)=0$. Die entstehende Gleichung hat eine positive Wurzel zwischen 0 und 0·1; liegt sie z. B. zwischen 0·03 und 0·04, so verkleinere man abermals die Wurzeln um 0·03, so erhält man eine Gleichung, deren Wurzeln um $a+0{\cdot}53$ kleiner sind, als die von $f(x)=0$. In dieser Weise kann man fortfahren, bis man auf eine Gleichung kommt, in der das von x befreite Glied sehr klein wird; dann ist eine Wurzel derselben fast 0, und da man weiß, um wie viel dieselbe kleiner ist, als die der $f(x)=0$, so kennt man auch die letztere. Dabei sind noch einige Einzelheiten zu merken, die wir an dem folgenden Beispiele klar machen wollen.

§. 3.

Sei $f(x)=x^3-18x^2+2x-7=0.$ (2)

Hier ist, wenn man die Gleichung nach §. 6 des vorigen Abschnitts untersucht:

$f(x)=x^3-18x^2+2x-7,$	$x=0$: − + + −	eine positive Wurzel.
$f_1(x)=3x^2-36x+2,$	$x=\infty$: + + + −	
$f^2(x)=212x+9,$	$x=-\infty$: − + − −	keine negative
$f^3(x)=-$	$x=0$: − + + −	Wurzel.

Für $x = +17$ gibt $f(x)$: -262, für $x = +18$: $+29$, also liegt die positive Wurzel zwischen 17 und 18.

Man verkleinere also um 17:

$$\begin{array}{rrrr} 1 & -18 & 2 & -7 \\ & 17 & -17 & -255 \\ \hline & -1 & -15 & -262 \\ & 17 & 272 & \\ \hline & 16 & 257 & \\ & 17 & & \\ \hline & 33 & & \end{array}$$

also ist die neue Gleichung

$$x^3 + 33x^2 + 257x - 262 = 0. \quad (3)$$

Es ist klar, daß hier das letzte Glied dasselbe Zeichen haben muß, wie in der obigen Gleichung. Da nämlich zwischen 0 und 17 keine Wurzel der Gleichung $f(x) = 0$ liegt, so muß $f(x)$ für $x = 0$ und $x = 17$ Resultate von demselben Vorzeichen geben. Das erste Resultat ist -7, das zweite ist aber nothwendig -262. Denn in der neuen Gleichung $x = 0$ setzen, heißt in der frühern $x = 17$ setzen; oder es ist

$$x^3 + 33x^2 + 257x - 252 = (x+17)^3 - 18(x+17)^2 + 2(x+17) - 7,$$

was eben dasselbe ist. Also muß man für $f(17)$ das letzte Glied der neuen Gleichung erhalten, das folglich von demselben Zeichen mit -7 sein muß. Dies ist aber hier nur deßwegen wahr, weil zwischen 0 und 17 keine Wurzel von $f(x) = 0$ liegt. Hätte man um 18 verkleinert, also um zu viel, so wäre das letzte Glied in der neuen Gleichung positiv geworden.

Die Gleichung (3) hat nun eine einzige positive Wurzel zwischen 0 und 1. Verkleinert man nun um 0·4 z. B., und wird das letzte Glied der entstehenden Gleichung von demselben Zeichen wie -262, so liegt jedenfalls die positive Wurzel nicht zwischen 0 und $+0{\cdot}4$; wird es positiv, so liegt sie zwischen 0 und 0·4. Da dieses letzte Glied, wie man aus (1) ersieht, immer zuerst erhalten wird, so hat man immer ziemlich leicht den Versuch anzustellen. Verkleinern wir einmal um 0·8.

$$\begin{array}{rrrr} 1 & 33 & 257 & -262 \\ & 0{\cdot}8 & 27{\cdot}04 & 227{\cdot}232 \\ \hline 1 & 33{\cdot}8 & 284{\cdot}04 & -34{\cdot}768 \end{array}$$

also, da $-34{\cdot}768$, das letzte Glied der neuen Gleichung, noch negativ ist, so liegt die Wurzel nicht zwischen 0 und 0·8. Verkleinern wir um 0·9:

$$\begin{array}{rrrr}
1 & 33 & 257 & -262 \\
 & 0{\cdot}9 & 30{\cdot}51 & 258{\cdot}759 \\
\hline
1 & 33{\cdot}9 & 287{\cdot}51 & -\ 3{\cdot}241 \\
 & 0{\cdot}9 & 31{\cdot}32 & \\
\hline
1 & 34{\cdot}8 & 318{\cdot}83 & \\
 & 0{\cdot}9 & & \\
\hline
1 & 35{\cdot}7 & &
\end{array}$$

Die Wurzel liegt auch nicht zwischen 0 und 0·9, aber doch jedenfalls zwischen 0·9 und 1, so daß man um 0·9 verkleinern mußte. Die neue Gleichung ist

$$x^3+35{\cdot}7x^2+318{\cdot}83x-3{\cdot}241=0, \qquad (4)$$

ihre Wurzeln sind um 17·9 kleiner als die der vorgelegten, d. h. letztere hat eine Wurzel 17·9 . . .

Die Gleichung (4) hat nun eine positive Wurzel zwischen 0 und 0·1. Dieselbe sei $=\frac{\alpha}{100}$, wo α eine ganze Zahl, nicht größer als 9. Man muß nun folgende Reihe bilden:

$$\begin{array}{cccc}
1 & 35{\cdot}7 & 318{\cdot}83 & -3{\cdot}241 \\
 & +\frac{\alpha}{100} & \left(35{\cdot}7+\frac{\alpha}{100}\right)\frac{\alpha}{100} & 318{\cdot}83\,\frac{\alpha}{100}+\ldots \\
\hline
1 & 35{\cdot}7+\frac{\alpha}{100} & 318{\cdot}83+\ldots. & \ldots.
\end{array}$$

Das letzte sollte ungefähr 0 geben, da man dann die Wurzel genau hätte. Also muß ungefähr:

$$318{\cdot}83.\frac{\alpha}{100}=3{\cdot}241,\ \frac{\alpha}{100}=\frac{3{\cdot}241}{318{\cdot}83}=0{\cdot}01\ldots$$

sein. Man wird also vermuthen, daß die Wurzel von (4) zwischen 0·01 und 0·02 liege. Zur Kontrole vermindere man um 0·02:

$$\begin{array}{rrrr}
1 & 35{\cdot}7 & 318{\cdot}83 & -3{\cdot}241 \\
 & 0{\cdot}02 & 0{\cdot}7144 & 6{\cdot}390888 \\
\hline
1 & 35{\cdot}72 & 319{\cdot}5444 & 3{\cdot}149888,
\end{array}$$

also wird das letzte Glied wirklich positiv, d. h. die Wurzel liegt zwischen 0 und 0·02. Man vermindere nun um 0·01:

$$\begin{array}{rrrr}
1 & 35{\cdot}7 & 318{\cdot}83 & -3{\cdot}241 \\
 & 0{\cdot}01 & 0{\cdot}3571 & 3{\cdot}191871 \\
\hline
1 & 35{\cdot}71 & 319{\cdot}1871 & -0{\cdot}049129 \\
 & 0{\cdot}01 & 0{\cdot}3572 & \\
\hline
1 & 35{\cdot}72 & 319{\cdot}5443 & \\
 & 0{\cdot}01 & & \\
\hline
1 & 35{,}73 & &
\end{array}$$

Die neue Gleichung ist jetzt:

$$x^3+35{\cdot}73x^2+319{\cdot}5443x-0{\cdot}049129=0. \qquad (5)$$

Ihre (positive) Wurzel ist nun 17·91 kleiner als die der (2), d. h. letztere hat eine Wurzel 17·91. . . . .

Die positive Wurzel von (5) liegt zwischen 0 und 0·01. Ganz wie oben findet man wieder ungefähr:

$$\frac{\alpha}{1000}=\frac{0{\cdot}049129}{319{\cdot}5443}=0{\cdot}0001,\ \text{also eigentlich}\ \frac{\alpha'}{10000}=0{\cdot}0001,$$

α' ungefähr $= 1$,

so daß diese Wurzel vermuthlich zwischen 0·0001 und 0·0002 liegt. Zur Kontrole verkleinere man um 0·0002:

1	35·73	319·5443	−0·049129
	0·0002	0·0071	0·063910
	35·7302	319·5514	+0·014781

was die Vermuthung rechtfertigt. Man verkleinere also um 0·0001:

1	35·73	319·5443	−0·049129
1	35·7301	319·5479	−0·017174
1	35·7302	319·5515	
1	35·7303		

also die neue Gleichung:

$$x^3+35{\cdot}7303x^2+319{\cdot}5515x-0{\cdot}017174=0, \qquad (6)$$

deren (positive) Wurzel nun um 17·9101 kleiner ist, als die von (2), d. h. letztere hat eine Wurzel 17·9101, was auf vier Stellen genau ist.*)

Wählen wir ein zweites Beispiel:

$$x^4-4x^3+x+4=0.$$

Man findet leicht, daß diese Gleichung eine positive Wurzel zwischen 1 und 2 hat.

Verminderung um 1:

1	−4	0	1	4
	+1	−3	−3	−2
	−3	−3	−2	2
	1	−2	−5	
	−2	−5	−7	
	1	−1		
	−1	−6		
	1			
	0		$\frac{2}{7}=0{\cdot}2$	

*) Die Gleichung (6) hat nämlich eine positive Wurzel zwischen 0 und 0·0001, also die vorgelegte (2), deren Wurzeln um 17·9101 größer sind, jedenfalls eine positive Wurzel zwischen 17·9101 und 17·9102, d. h. diese Wurzel heißt 17·9101. . . .

Verminderung um 0·2*):

1   0   —6   —7   2
0·2   —5·96   —8·192   +0·3616
0·4   —5·88   —9·368
0·6   —5·76 $\frac{0·3616}{9·368} = 0·03$
0·8

Zur Kontrole vermindere man um 0·3:

1   0   —6   —7   2
0·3   —5·91   —8·773   —0·6319, richtig.

Verminderung um 0·03:

1   0·8   —5·76   —9·368   0·3616
1   0·83   —5·7351   —9·540053   0·07539841
0·86   —5·7093   —9·711332
0·89   —5·6826
0·92 $\frac{0·07539841}{9·711332} = 0·007$

Wurzel: 1·23

Zur Kontrole vermindere man um 0·04:

1   0·84   —5·7364   —9·597456   —0·02 . . . , richtig.

Verminderung um 0·007:

1   0·92   —5·6826   —9·711332   0·07539841
0·927   —5·6762   —9·751065   0·00714095
0·934   —5·6697   —9·790753
0·941   —5·6631
0·948 $\frac{0·00714095}{9·790753} = 0·0007$

Wurzel 1·237

Verminderung um 0·0007:

1   0·948   —5·6631   —9·790753   0·00714095
0·94   —5·662   —9·794716   0·00028465
0·94   —5·662   —9·798679
0·95   —5·661   Wurzel 1·2377
0·95 $\frac{0·00028465}{9·798679} = 0·00002$

Verminderung um 0·0002:

1   0·95   —5·661   —9·798679   0·00028465
—9·798792   0·00008868
bleiben   —9·798905

Wurzel 1·23772

$\frac{0·00008868}{9·798905} = 0·000009$

*) Wobei zur Abkürzung die zu addirenden Produkte nicht eingetragen sind.

Verminderung um 0·000009:

1	0·95	—5·661	—9·798905	0·00008868
			—9·7994	0·00000049
	bleiben		bleibt	

Wurzel 1·237729

$$\frac{0{\cdot}00000049}{9{\cdot}7994} = 0{\cdot}00000005$$

Verminderung um 0·00000005:

1	0·95	—5·661	—9·7994	0·00000049
				0·00000001
		bleiben		Wurzel 1·23772905

Da, wie man leicht sieht, die Kontrole überall zutrifft*), so ist also 1·23772905 die Wurzel auf 8 Dezimalstellen genau, d. h. die gesuchte Wurzel liegt zwischen 1·23772905 und 1·23772906.

Man wird aus diesen, ausführlich behandelten Beispielen den Gang der Untersuchung genau ersehen können, ohne daß es nothwendig wäre, ein Weiteres darüber zu sagen.

Um übrigens noch ein Beispiel zu geben, wollen wir die Gleichung

$$x^3 - 60x^2 + 999x - 3734 = 0$$

betrachten, welche drei reelle Wurzeln, zwischen 5 und 6, 20 und 30, 30 und 40 hat. Wir führen dabei die Rechnung vollständig.

Suchen wir dieselben.

1	—60	999	—3734	5
	5	—275	3620	
	—55	724	—114	
	5	—250		
	—50	474		
	5			
	—45			

$$\frac{114}{474} = 0{\cdot}2$$

1	—45	474	—114	0·2
	0·2	—8·96	93·008	
	—44·8	465·04	— 20·992	
	0·2	—8·92		
	—44·6	456·12		
	0·2			
	—44·4			

$$\frac{20{\cdot}992}{456{\cdot}12} = 0{\cdot}04$$

---

*) Es genügt, daß sie z. B. im letzten Falle zutreffe, denn die letzte Gleichung hat jedenfalls eine um 1·23772905 kleinere Wurzel als die vorgelegte.

1	—44·4	456·12	—20·992	0·04
	0·04	—1·7744	18·173824	
	—44·36	454·3456	— 2·818176	
	4	—1·7728		
	—44·32	452·5728		
	4			
	—44·28		$\frac{2·818}{452·57} = 0·006$	
1	—44·28	452·5728	—2·818176	0·006
	0·006	—0·2656	2·7138432	
	—44·274	452·3072	—0·104332	
	6	— 2655		
	—44·268	452·0417		
	6			
	—44·262		$\frac{0·1043}{452·04} = 0·0002$	
1	—44·26	452·0417	—0·104332	0.0002
		— 88	90406	
		452·0329	—0·013926	
		— 88		
		452·0241	$\frac{0·0139}{452} = 0·00003$	
1	—44·26	452·02	—0·013926	
			13560	
			—0·000366	

Erste Wurzel: 5·24623

1	—60	999	—3734	20
	20	—800	3980	
	—40	199	246 *)	
	20	—400	$\frac{246}{201} = 1·$	
	—20	—201		
	20			
	0			

*) Es geht ein Zeichenwechsel vor; dies rührt daher, daß von 0 bis 20 die oben gefundene Wurzel liegt.

1	0	−201	246	1
	1	1	−200	
	1	−200	46	
	1	2		
	2	−198		
	1		$\frac{46}{198} = 0{\cdot}2.$	
	3			
1	3	−198	46	0·2
	0·2	0·64	−39·472	
	3·2	−197·36	6·528	
	2	68		
	3·4	−196·68		
	2		$\frac{6{\cdot}528}{196{\cdot}68} = 0{\cdot}03$	
	3·6			
1	3·6	−196·68	6·528	0·03
	0·03	1089	−5·897133	
	3·63	−196·5711	0·630867	
	3	1098		
	3·66	−196·4613		
	3		$\frac{0{\cdot}6308}{196{\cdot}46} = 0{\cdot}003$	
	3·69			
1	3·69	−196·4613	0·630867	0·003
	0·003	110	−0·589350	
	3·693	−196·4503	0·041517	
	3	110		
	3·696	−196·4393		
	3		$\frac{0{\cdot}0415}{196} = 0{\cdot}0002$	
	3·699			
1	3·699	−196·43	0·041517	0·0002
			− 39287	
			0·001230	
			$\frac{0{\cdot}00123}{196} = 0{\cdot}00000$	

Zweite Wurzel: 21·23320.

1	−60	999	−3734	30
	30	−900	2970	
	−30	99	− 764 *)	
	30	0		
	0	99		
	30		$\frac{764}{99} = 3$ (alles Andere findet sich zu hoch).	
	30			

*) Kein Zeichenwechsel, weil zwei Wurzeln zwischen 0 und 30 liegen.

1	30	99	−764	3
	3	99	594	
	33	198	−170	
	3	108		
	36	306		
	3			
	39			

$$\frac{170}{306} = 0{\cdot}5$$

1	39	306	−170	0·5
	0·5	19·75	162·875	
	39·5	325·75	− 7·125	
	5	20		
	40	345·75		
	0·5			
	40·5			

$$\frac{7{\cdot}125}{345} = 0{\cdot}02$$

1	40·5	345·75	−7·125	0·02
	02	8104	6·931208	
	40·52	346·5604	−0·193792	
	2	8108		
	40·54	347·3712		
	2			
	40·56			

$$\frac{0{\cdot}1937}{347} = 0{\cdot}0005$$

1	40·56	347·371	−0·193792	0·0005
		2	173686	
		347·373	− 0·020106	

$$\frac{0{\cdot}0201}{347} = 0{\cdot}00005$$

1	40·5	347·37	−0·020106
			17368
			−0·002738

Dritte Wurzel: 33·52055

Probe:
5·24623
22·23320
33·52055
59·99999 (Vierter Abschnitt, §. 6.)

§. 4.

Das Gesagte bezieht sich nur auf die positiven Wurzeln einer Gleichung. Um aber aus f(x)=0 die negativen Wurzeln zu erhalten, setze man x= −z und sucht nun in der neuen Gleichung die positiven Wurzeln, so werden diese, mit dem — Zeichen genommen, die geforderten negativen Wurzeln sein.

Zugleich gilt alles Obige zunächst nur für den Fall, da die betreffenden reellen Wurzeln nur einfach in der Gleichung $f(x)=0$ enthalten sind. Der Fall gleicher Wurzeln kann aber nach §. 10 des vierten Abschnitts immer auf den einfacher Wurzeln zurückgeführt werden, indem man nur die Gleichung $\frac{f(x)}{\varphi(x)}=0$ (§. 10 a. a. O.) statt $f(x)=0$ betrachtet.

Einige Schwierigkeiten verursacht aber der Fall, in welchem zwischen zwei (positiven) Zahlen c und c+1 mehrere Wurzeln liegen, die in einigen Dezimalstellen übereinstimmen, da in diesem Falle die neu entstandenen Gleichungen, wie (3), (4) u. s. f. nicht bloß eine einzige positive Wurzel haben, also das Kennzeichen wegfällt, das aus dem Zeichenwechsel des letzten Gliedes sich ergibt.

Wählen wir ein Beispiel:

$$x^3+11x^2-102x+181=0. \qquad (7)$$

Hier ist

$$f(x)=x^3+11x^2-102x+181,$$
$$f_1(x)=3x^2+22x-102,$$
$$f^2(x)=122x-393,$$
$$f^3(x)=9. \qquad (8)$$

Für $x=0$: + — — +, $x=\infty$: + + + +, also zwei positive Wurzeln.

$x=1$: + — — +,
$x=2$: + — — +
$x=3$: + — — +
$x=4$: + + + +, also beide zwischen 3 und 4.

Man verkleinere nun in der Gleichung (7) um 3:

1	11	—102	181
	14	— 60	1
	17	— 9	
	20		

so ist die neue Gleichung

$$\varphi(x)=x^3+20x^2-9x+1=0. \qquad (9)$$

Will man diese nach dem Sturm'schen Satze untersuchen, so braucht man offenbar in den Größen (8) nur um 3 zu verkleinern. Dies gibt, wenn man die erste derselben nicht weiter berechnet, da sie durch (9) gegeben ist:

a) für die zweite:	3	22	—102
		31	— 9
		40	
b) für die dritte:	122	—393	
		— 27	

Also sind die neuen Größen:

$\varphi(x)=x^3+20x^2-9x+1,$
$\varphi_1(x)=3x^2+40x-9,$
$\varphi^2(x)=122x-27,$
$\varphi^3(x)=+9.$ (10)

Für x=0·2: + — — +, x=0·3= + + + +, also zwei Wurzeln zwischen 0·2 und 0·3. Man verkleinere nun in (9) um 0·2:

1	20	—9	1	0·2
	20·2	—4·96	+0·008	
	20·4	—0·88		
	20·6			

Die neue Gleichung ist

$x^3+20{\cdot}6x^2-0{\cdot}88x+0{\cdot}008=0,$ (11)

Da $\frac{0{\cdot}008}{0{\cdot}88}=0{\cdot}00$, so versuchen wir in (11) um 0·02 zu verkleinern:

1	20·6	—0·88	0·008	0·02
	20·62	—0·4676	—0·001352.	

Da das letzte Glied sein Zeichen wechselt, so ist jedenfalls eine einzige Wurzel von (11) zwischen 0 und 0·02. Verkleinern wir um 0·01 (wobei wir wieder einmal die Produkte anschreiben wollen):

1	20·6	—0·88	0·008	0·01
	0·01	0·2061	—0·006739	
	20·61	—0·6739	0·001261	
	0·01	0·2062		
	20·62	—0·4677		
	0·01			
	20.63			

so daß die neue Gleichung

$x^3+20{\cdot}63x^2-0{\cdot}4677x+0{\cdot}001261=0$

ist, und also eine Wurzel von (7) mit 3·21 anfängt. Man findet leicht, daß die zweite Wurzel von (11) zwischen 0·02 und 0·03 liegt, so daß man also in jener Gleichung um 0·02 zu verkleinern hat. Wären die Wurzeln in (11) noch nicht getrennt, so müßte man in (10) ebenfalls um 0·2 verkleinern und dann vermöge der neuen Ausdrücke untersuchen, in welchen Zwischenräumen die zwei Wurzeln liegen. Die aus (11) hervorgehenden Ausdrücke wären:

$x^3+20{\cdot}6x^2-0{\cdot}88x+0{\cdot}008,$
$3x^2+41{\cdot}2x-0{\cdot}88,$
$122x-2{\cdot}6$
$+9$

Für x=0: + — — +
x=0·01: + — — + } nur eine Wurzel zwischen 0·01 und 0·02,
x=0·02: — — — + } wieder nur eine zwischen 0·02 und 0·03.
x=0·03: + + + +

§. 5.

Das in diesem Abschnitt Gesagte genügt nun vollständig, um die reellen Wurzeln einer Gleichung bestimmen zu können, und zwar bis zu einem beliebigen Grade der Annäherung. Wegen ihres häufigen Gebrauchs wollen wir noch einige Worte über die Newton'sche Annäherungsmethode beifügen*). Gesetzt man wisse, die Gleichung $f(x)=0$ habe eine wenig von a verschiedene Wurzel, so daß die wahre Wurzel $= a+u$ ist, wo u eine kleine Zahl. Alsdann ist $f(a+u)=0$, d. h. wenn man die Formel (22) in §. 10 (vierter Abschn.) beachtet:

$$f(a)+f_1(a).\,u+\frac{f_2(a)}{1.2}u^2+\ldots=0, \qquad (12)$$

also

$$u=-\frac{f(a)}{f_1(a)}-u^2\left(\frac{f_2(a)}{2f_1(a)}+u\frac{f_3(a)}{6f_1(a)}+\ldots\right).$$

Ist nun u sehr klein, so wird man auf der zweiten Seite den u enthaltenden Theil weglassen können, vorausgesetzt, daß nicht $f_1(a)$ sehr klein ist, in welchem Falle $\frac{f_2(a)}{f_1(a)}$ groß genug sein könnten, damit man jenen Theil nicht weglassen dürfte. Unter dieser Voraussetzung hat man annäherungsweise

$$u=-\frac{f(a)}{f_1(a)}, \qquad (13)$$

woraus man eine oder mehrere weitere Stellen der Wurzel berechnet. Setzt man jetzt $a+u=b$, so wird man eine weitere Näherung u' erhalten aus

$$u'=-\frac{f(b)}{f_1(b)}, \qquad (14)$$

u. s. w. Da man aber kein Merkmal hat, nach dem man entscheiden kann, wie weit die Näherung zu treiben ist, so muß man sich dessen versichern, indem man die gefundenen Werthe in $f(x)$ substituirt.

Sei z. B. (§. 8 des vorigen Abschn.):

$$f(x)=x^3-7x+7=0,$$

so liegt eine Wurzel zwischen 1·3 und 1·4. Sei also dieselbe $1{\cdot}3+u$, so ist

$$u=-\frac{f(1{\cdot}3)}{f_1(1{\cdot}3)}=-\frac{0{\cdot}097}{-1{\cdot}93}=0{\cdot}05,$$

also ist ein genäherter Werth 1·35. Wirklich ist

---

*) Fourier hat dieselbe wesentlich verbessert, wir können aber hier nicht darauf weiter eingehen. Siehe Anhang III.

$$f(1{\cdot}35) = +0{\cdot}01 \ldots$$
$$f(1{\cdot}36) = -0{\cdot}004 \ldots$$
$$u' = -\frac{f(1{\cdot}35)}{f_1(1{\cdot}35)} = \frac{0{\cdot}01037}{1{\cdot}5325} = 0{\cdot}0068,$$

also ein weiterer genäherter Werth 1·3568; wirklich findet man:

$$f(1{\cdot}3568) = +0{\cdot} \ldots\ldots$$
$$f(1{\cdot}3569) = -0{\cdot} \ldots\ldots$$

Was die Berechnung der Größen f(1·35), f(1·3568) u. s. w. betrifft, so geschieht sie nach dem in §. 1 dieses Abschnitts gelehrten Verfahren. Man wird nämlich leicht einsehen, daß, wenn allgemein

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots\ldots + a_n, \qquad (15)$$

$f(\alpha)$ nichts Anderes ist, als der Rest, den man erhält, wenn man f(x) durch $x-\alpha$ dividirt, was unmittelbar aus der dortigen Gleichung

$$f(x) = (x-\alpha)\,(A_0 x^{n-1} + \ldots\ldots + A_{n-1}) + A_n$$

folgt, wenn man $x=\alpha$ setzt.

Das Schema der Berechnung von $f(\alpha)$ oder A_n ist aber:

$$\begin{array}{llllll} a_0 & a_1, & a_2, & a_3, & \ldots\ldots, & a_n \\ & a_0\alpha, & A_1\alpha, & A_2\alpha, & \ldots\ldots & A_{n-1}\alpha \\ \hline a_0 & A_1, & A_2, & A_3, & \ldots\ldots, & A_n. \end{array}$$

Für unsern Fall wäre z. B. bei f(1·3568):

$$\begin{array}{llll|l} 1 & 0 & 7 & +7 & 1{\cdot}3568 \\ & 1{\cdot}3568, & 1{\cdot}84090624, & -6{\cdot}99985839 & \\ \hline & 1{\cdot}3568, & -5{\cdot}15909376, & +0{\cdot}00014161. & \end{array}$$

Der Fall, daß $f_1(a)$ klein ist, wird aber immer dann eintreten, wenn zwei (oder mehrere) Wurzeln nahezu gleich a sind (d. h. der Fall des §. 4). Es ergibt sich dies aus der Formel (23) des §. 10 im vierten Abschnitt, wenn man dort a und b nahezu gleich x setzt. Gerade in diesem Falle würde also die Newton'sche Annäherungsmethode nicht gut angewendet werden können.

Eine genauere Annäherung erhielte man in dem Falle, da $f_1(a)$ sehr klein ist, wenn man drei Glieder der Gleichung (12) beibehielte. Dies gäbe:

$$f(a) + f_1(a)u + \frac{f_2(a)}{1.\ 2}u^2 = 0,$$

$$u = -\frac{f_1(a)}{f_2(a)} \pm \sqrt{\frac{(f_1(a))^2 - 2f(a).\ f_2(a)}{(f_2(a))^2}}, \qquad (15)$$

nur darf nicht $f_2(a)$ selbst sehr klein sein. So ist in dem Beispiele (7) des §. 4: $a=3{\cdot}2$, $f(3.2)=0.008$, $f_1(3.2)=-0{\cdot}88$, $f_2(3.2)=41{\cdot}2$, also aus (15):

$$u = \begin{cases} 0{\cdot}0131211 \\ 0{\cdot}0295973, \end{cases}$$

welche beide Werthe annäherungsweise zu gebrauchen sind. Um z. B. den ersten Werth zu prüfen, vermindere man in der Gleichung

$$x^3+20{\cdot}63x^2-0{\cdot}4677x+0{\cdot}001261=0 \text{ (§. 4)}$$

nach einander um 0·003, 0·0001, 0·00002, . . . :

	1	20·6	−0·4677	0·001261
		0·003	61809	0·001217673
0·003)		20·603	−0·405891	0·000043327
		3	61818	
		20·606	−0·344073	
		3		
		20·609		
	1	20·609	−0·344073	0·000043327
		0001	2060	— 34201
0·0001)		20·6091	−0·342012	0·000009125
		1	2060	
		20·6092	−0·339951	
		1		
		20·6093		
	1	20·6093	−0·339951	0·000009125
			412	— 6788
0·00002)			−0·339439	0·000002337
			412	
			−0·339027	
	1	20·6093	−0·339027	0·000002337
			20	— 339
0·000001)			−0·339006	0·000001998

Hier trifft nun die Kontrole nicht mehr ein; denn vermindert man um 0·000002, so erhält man:

1	20·6093	−0·339027	0·000002337
		41	— 676
		−0·338986	+ 0·00000 . . .,

so daß nur die ersten fünf Ziffer, d. h. 3·21312 richtig sind.

§. 6.

Wir wollen nun nochmals auf den bereits in §. 4 behandelten schwierigen Fall zurückkommen, da mehrere reelle Wurzeln einander beinahe gleich sind.

Man bestimme zunächst die Ganzen dieser Wurzeln, so daß man weiß, alle diese Wurzeln liegen zwischen a und a+1. Sodann bilde man aus der vorgelegten Gleichung diejenige, deren Wurzeln um a kleiner sind (§. 1).

Sei diese Gleichung:

$$A_0x^n+A_1x^{n-1}+\dots+A_{n-1}x+A_n=0=\varphi(x). \qquad (16)$$

Dieselbe hat also, der Annahme nach, mehrere fast gleiche Wurzeln zwischen 0 und 1. Denken wir uns zuerst, alle diese Wurzeln seien gleich, so daß also (16) mehrere gleiche Wurzeln hätte. Wären zwei Wurzeln von (16) gleich, so müßte (§. 10 des vierten Abschnitts) noch die Gleichung bestehen:

$$\varphi_1(x)=nA_0x^{n-1}+\dots+2A_{n-2}x+A_{n-1}=0, \qquad (17)$$

und diese Gleichung hätte jene Wurzel (zwischen 0 und 1) nur einmal. Daher kann man (§. 5) einstweilen die höhern Potenzen von x vernachlässigen und zieht so aus (17):

$$2A_{n-2}x+A_{n-1}=0,\ x=-\frac{A_{n-1}}{2A_{n-2}}. \qquad (18)$$

Wären drei Wurzeln (zwischen 0 und 1) von (16) gleich, so bestünde außer (17) noch die Gleichung:

$$\varphi_2(x)=n(n-1)A_0x^{n-2}+\dots+6A_{n-3}x+2A_{n-2}=0, \qquad (19)$$

und man hätte zur Bestimmung von x annäherungsweise:

$$6A_{n-3}x+2A_{n-2}=0,\ x=-\frac{A_{n-2}}{3A_{n-3}}, \qquad (20)$$

u. s. w., da man leicht das in diesen Formeln bereits vor Augen liegende Gesetz erkennen wird.

Nun sind allerdings die fraglichen Wurzeln von (16) nicht gleich; da sie aber nur wenig von einander verschieden sind, so wird die obige Annahme näherungsweise für sie zulässig sein, und die Formeln (18) oder (20) u. s. w. werden die nächste, allen diesen Wurzeln gemeinschaftliche Dezimalstelle geben.

Hat man hierdurch diese Stelle gefunden, so vermindere man in der Gleichung (16) um dieselbe und behandle die erhaltene Gleichung wie so eben (16).

Es läßt sich derselbe Gegenstand auch noch von anderm Standpunkte aus betrachten. Ist $f(x)=0$ die vorgelegte Gleichung, so ist (§. 1):

$$f(x)=A_0(x-a)^n+A_1(x-a)^{n-1}+\dots+A_{n-1}(x-a)+A_n.$$

Bemerkt man nun, daß $f_1(x)$ der Werth von $\frac{f(x+z)-f(x)}{z}$ für $z=0$ ist (§. 10 des vierten Abschnitts); eben so $f_2(x)$ der Werth von $\frac{f_1(x+z)-f_1(x)}{z}$ für $z=0$ u. s. w., so findet man sehr leicht:

$$f_1(x)=nA_0(x-a)^{n-1}+(n-1)A_1(x-a)^{n-2}+\dots+A_{n-1},$$
$$f_2(x)=n(n-1)A_0(x-a)^{n-2}+\dots+2A_{n-2},$$
$$f_3(x)=n(n-1)(n-2)A_0x^{n-3}+\dots+3.2A_{n-3},$$
$$\vdots$$

also ist offenbar:

$$A_n = f(a),$$
$$A_{n-1} = f_1(a),$$
$$A_{n-2} = \frac{1}{2} f_2(a),$$
$$A_{n-3} = \frac{1}{2.3} f_3(a), \text{ u. s. w.} \qquad (21)$$

Gesetzt nun wirklich, die Gleichung (16) habe zwei gleiche Wurzeln zwischen 0 und 1, so wird $f_1(a)$ klein sein*), $f_2(a)$ aber nicht; d. h. nach (21), A_{n-1} ist klein, A_{n-2} nicht. Eine Annäherung wird sich also aus (16) nur ergeben, wenn man die drei letzten Glieder beibehält, d. h. setzt:

$$A_{n-2}x^2 + A_{n-1}x + A_n = 0 \text{ (§. 5 (15))}.$$

Da aber (17) zugleich besteht, so wird annäherungsweise auch $2A_{n-2}x + A_{n-1} = 0$, d. h.

$$2A_{n-2}x^2 + A_{n-1}x = 0$$

sein. Multiplizirt man die erste dieser Gleichungen mit 2 und subtrahirt die letzte dann, so wird

$$A_{n-1}x + 2A_n = 0, \; x = -\frac{2A_n}{A_{n-1}}. \qquad (22)$$

Diese Formel muß, im Falle zweier gleichen Wurzeln, dieselbe Anfangsziffer geben, wie (18). (Die letzte dieser zwei Gleichungen drückt auch aus, daß die erste zwei einander gleiche Wurzeln habe, was annäherungsweise richtig ist.)

Sind drei Wurzeln von (16) gleich, so sind $f_1(a)$, $f_2(a)$, d. h. A_{n-1}, A_{n-2} sehr klein, $f_3(a)$, also auch A_{n-3}, aber nicht.

Um dann eine Annäherung aus (16) zu erhalten, muß man die vier letzten Glieder beibehalten, also setzen:

$$A_{n-3}x^3 + A_{n-2}x^2 + A_{n-1}x + A_n = 0.$$

Da aber die Gleichungen (17) und (19) zugleich noch bestehen, so folgt aus ihnen, wenn man denselben Grad der Näherung will, wie so eben:

$$3A_{n-3}x^3 + 2A_{n-2}x^2 + A_{n-1}x = 0,$$
$$6A_{n-3}x^3 = 2A_{n-2}x^2 = 0,$$

(welche zwei Gleichungen nichts Anderes ausdrücken, als daß die vorige drei gleiche Wurzeln habe, was annäherungsweise richtig ist).

---

*) Wovon man sich auch überzeugen wird, wenn man bedenkt, daß $f_1(x)$ Null sein muß, wenn man für x eine der gleichen Wurzeln setzt.

Man multiplizire nun die erste Gleichung mit 6, die zweite mit −4, die dritte mit + 1 und addire die Resultate, so ergibt sich:

$$2A_{n-1}x+6A_n=0,\ x=-\frac{3A_n}{A_{n-1}}, \qquad (23)$$

welche Formel wieder dieselbe Anfangsziffer geben muß, wie die Formel (20).

Hätte die Gleichung (16) vier gleiche Wurzeln zwischen 0 und 1, so sind A_{n-1}, A_{n-2}, A_{n-3}, klein, und erst A_{n-4} ist es nicht. Daraus folgt, wenn man zugleich beachtet, daß auch noch die drei abgeleiteten Gleichungen zugleich bestehen:

$$A_{n-4}x^4+A_{n-3}x^3+A_{n-2}x^2+A_{n-1}x+A_n=0,$$
$$4A_{n-4}x^4+3A_{n-3}x^3+2A_{n-2}x^2+A_{n-1}x=0,$$
$$12A_{n-4}x^4+6A_{n-3}x^3+2A_{n-2}x^2=0,$$
$$24A_{n-4}x^4+6A_{n-3}x^3=0.\ *)$$

---

*) Die hier auftretenden Gleichungssysteme haben im Allgemeinen die folgende Gestalt:

$$ax^m+bx^{m-1}+cx^{m-2}+ \ldots \ldots +l=0$$
$$max^m+(m-1)bx^{m-1}+(m-2)cx^{m-2}+ \ldots +1.kx=0$$
$$m(m-1)ax^m+(m-1)(m-2)bx^{m-1}+(m-2)(m-3)cx^{m-2} + \ldots +2.1ix^2=0$$
$$m(m-1)(m-2)ax^m+(m-1)(m-2)(m-3).bx^{m-1}+ (m-2)(m-3)(m-4)cx^{m-2}+ \ldots +3.2.1hx^3=0$$
$$\vdots$$
$$m(m-1)\ldots,2ax^m+(m-1)(m-2)\ldots 1bx^{m-1}=0$$

Man multiplizire nun die erste Gleichung mit $m(m-1)(m-2)\ldots 1=M$; die zweite mit $-\frac{M}{1}\cdot\frac{m-1}{m}$; die dritte mit $\frac{M}{1.2}\cdot\frac{m-2}{m}$; die vierte mit $-\frac{M}{1.2.3}\cdot\frac{m-3}{m}$; ... die letzte mit ± 1, je nachdem, ob m ungerade oder gerade ist; addire alsdann sämmtliche Gleichungen, so wird der Koeffizient von ax^m:

$$M\left[1-\frac{m-1}{1}+\frac{(m-1)(m-2)}{1.2}-\frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3}+\ldots\pm 1\right]=0$$

(nach Seite 3, Formel (4)).

Der Koeffizient von bx^{m-1} ist:

$$\frac{M}{m}\left[m-\frac{m-1}{1}(m-1)+\frac{(m-1)(m-2)}{1.2}.(m-2)- \frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3}.(m-3)+\ldots\pm 1\right],$$

Man setze nun in Formel (IV), Seite 83: n=1, r+n=m−1, also r=m −2, wobei mithin m>2 sein muß, $x=\Delta x=1$, so ist

$$m-\frac{m-1}{1}.(m-1)+\frac{(m-1)(m-2)}{1.2}.(m-2)-\ldots(-1)^{m-1}\,1=0,$$

d. h. der Koeffizient von bx^{m-1} ist gleichfalls 0.

Man multiplizire die erste Gleichung mit 24, die zweite mit —18, die dritte mit 6, die vierte mit —1, und addire, so erhält man:

$$6A_{n-1}x+24A_n=0,\ x=-\frac{4A_n}{A_{n-1}}. \quad (23)$$

Da nun die Formeln (22), (23), (24) in dem betreffenden Fall gleichfalls die Anfangsziffer geben müssen, wie (18), (20) u. s. w., wenn nämlich die Wurzeln gleich vorausgesetzt werden, so hat man hierin also eine Kontrole, ob die Wurzeln durchweg gleich sind. So lange diese Formeln, wiederholt angewendet, dieselbe Ziffer geben, so lange ist die Annahme gleicher Wurzeln näherungsweise zulässig; sobald dies nicht mehr stattfindet, ist eben jene Voraussetzung auch nicht mehr zulässig, und von da an trennen sich die Wurzeln.

Als Beispiel mag die Gleichung

$$333x^5-1744x^4+1648x^3+333x^2+920x-1648=0$$

dienen, die zwei Wurzeln zwischen 1 und 2 hat. Vermindern wir um 1:

Der Koeffizient von cx^{m-2} ist:

$$\frac{M}{m}\Big[m-\frac{m-2}{1}.(m-1)+\frac{(m-2)(m-3)}{1.2}.(m-2)-\frac{(m-2)(m-3)(m-4)}{1.2.3}.(m-3)+\ldots\mp 2\Big].$$

Setzt man aber in derselben Formel $n=1$, $r+n=m-2$, also $r=m-3$, wobei nun $m>3$ sein muß, $x=2$, $\varDelta x=1$, so ist

$$m-\frac{m-2}{1}.(m-1)+\frac{(m-2)(m-3)}{1.2}.(m-2)-\ldots(-1)^{m-2}\,2=0,$$

also der Koeffizient von cx^{m-2} auch 0.

Der Koeffizient von dx^{m-3} ist:

$$\frac{M}{m}\Big[m-\frac{m-3}{1}.(m-1)+\frac{(m-3)(m-4)}{1.2}.(m-2)-\frac{(m-3)(m-4)(m-5)}{1.2.3}(m-3)+\ldots\pm 3\Big].$$

Setzt man in der mehr erwähnten Formel: $n=1$, $r+n=m-3$, also $r=m-4$, wobei nun $m>4$ sein muß, $x=3$, $\varDelta x=1$, so ist

$$m-\frac{m-3}{1}.(m-1)+\frac{(m-3)(m-4)}{1.2}.(m-2)-\ldots(-1)^{m-3}\,3=0,$$

also der Koeffizient von dx^{m-3} ebenfalls Null.

Man sieht leicht, daß so alle Koeffizienten in der Summe verschwinden, bis auf die zwei letzten. Nach der jeweils nöthigen Bedingung hinsichtlich n wird nämlich der Koeffizient von x^{m-p} verschwinden, wenn $m>p+1$, was erfüllt ist bis für $p=m-1$, d. h. bis für die zwei letzten Glieder mit kx und l. Also ist die Summe aller Gleichungen:

$$\Big(M-\frac{M}{m}.(m-1)\Big)kx+Ml=0,\ x=-\frac{ml}{k},$$

was eben der allgemeine Satz ist, den die Gleichungen (22), (23), (24) speziell enthalten.

333	—1744	1648	333	920	—1648
	333	—1411	237	570	1490
	—1411	237	570	1490	— 158
1)	333	—1078	— 841	— 271	
	—1078	— 841	— 271	1219	
	333	— 745	—1586		
	— 745	—1586	—1857		
	333	— 412			
	— 412	—1998			
	133				
	— 79				

$A_n = -158,\ A_{n-1} = 1219,\ A_{n-2} = -1857$

$\frac{-A_{n-1}}{2A_{n-2}} = 0{\cdot}2,\ \frac{-2A_n}{A_{n-1}} = 0{\cdot}2.$

333	— 79	—1998	—1857	1219	—158
	66·6	— 2·48	— 400·096	— 451·4192	153·51616
	— 12·4	—2000·48	—2257·096	767·5808	— 4·48384
0·2)	66·6	10·84	— 397·928	— 531·0048	
	54·2	—1989·64	—2655·024	236·576	
	66·6	24·16	— 393·096		
	120·8	—1965·48	—3048·12		
	66·6	37·48			
	187·4	—1928			
	66·6				
	254				

$A_n = -4{\cdot}48384,\ A_{n-1} = 236{\cdot}576,\ A_{n-2} = -3048{\cdot}12,$

$\frac{-A_{n-1}}{2A_{n-2}} = 0{\cdot}03,\ \frac{-2A_n}{A_{n-1}} = 0{\cdot}03.$

333	254	—1928	—3048·12	236·576	—4·48384
	9·99	7·9197	— 57.602409	— 93·17167227	4·30212983
	263·99	—1920·0803	—3105·722409	143·40432773	—0·18171017
0·03)	9·99	8·2194	— 57·355827	— 94·89234708	
	273·98	—1911·8609	—3163·078236	48·51198065	
	9.99	8·5191	— 57·100254		
	283·97	—1903·3418	—3220·17849		
	9·99	8·8188			
	293·96	—1894·523			
	9·99				
	303·95				

$A_n = -0{\cdot}1817\ldots,\ A_{n-1} = 48{\cdot}5\ldots,\ A_{n-2} = -3220{\cdot}1\ldots$

$\frac{-A_{n-1}}{2A_{n-2}} = 0{\cdot}007,\ \frac{-2A_n}{A_{n-1}} = 0{\cdot}007$

333	303·95	—1894·523	—3220·1785	48·512	—0·18171017
	2·331	2·1439	— 13·2466	—22·633976	0·18114616
0·007)	306·281	—1892·3790	—3233·4251	25·878024	—0·00056401
	2·331	2·1602	— 13·2315	—22·746596	
	308·612	—1890·2187	—3246·6566	3·131428	
	2·331	2·1766	— 13·2263		
	310·943	—1888·0421	—3259·8829		
	2·331	2·1929			
	313·274	—1885·8492			
	2·331				
	315·605				

$A_n = -0{\cdot}00056401,\ A_{n-1} = 3{\cdot}131\ldots,\ A_{n-2} = -3259{\cdot}9$

$\frac{-A_{n-1}}{2A_{n-2}} = 0{\cdot}0004,\ \frac{-2A_n}{A_{n-1}} = 0{\cdot}0003$

Von jetzt an trennen sich die zwei Wurzeln. Man findet nun leicht, daß die nächste Ziffer der einen 2, der andern 7 ist, so daß jetzt jede für sich berechnet werden kann. *)

Für den Fall, daß in obigem Beispiele mehr als zwei Wurzeln zwischen 1 und 2 lägen, die sich nun noch nicht alle trennten, so daß also die übrigen, oder einige derselben noch weitere gemeinschaftliche Ziffern hätten, so würde man die kleinste Wurzel völlig entwickeln, die vorgelegte Gleichung mit dem ihr entsprechenden Wurzelfaktor dividiren, was nach §. 1 auszuführen ist, und die dadurch erhaltene Gleichung wie oben behandeln. Wollte man dies nicht, so kann man sich mit dem in §. 4 Gesagten vollständig behelfen; nur werden die Rechnungen weitläufig ausfallen. Uebrigens gehört der hier behandelte Fall zu den seltenen Ausnahmfällen.

Damit ist unsere Aufgabe, die reellen Wurzeln einer Gleichung zu bestimmen, in aller Vollständigkeit gelöst. Wir wollen nur einige Worte in Bezug auf die imaginären Wurzeln beifügen, indem wir bemerken, daß wir es hier nicht für nöthig erachten, weiter auf diesen Gegenstand einzugehen.

§. 7.

Ob eine gegebene Gleichung imaginäre Wurzeln habe oder nicht, findet sich leicht, wenn man die Anzahl der reellen Wurzeln nach den im fünften Abschnitt gegebenen Lehren bestimmt.

Gesetzt nun, die Gleichung $f(x)=0$ habe imaginäre Wurzeln. Sei $y+iz$ die allgemeine Form derselben, so ist

$$f(y+iz)=0 \text{ und zugleich: } f(y-iz)=0 \text{ (§. 5, 4. Abschn.)}$$

Setzen wir

$$f(y+iz)=F_1(y,z)+iF_2(y,z),$$

so ist also

$$F_1(y,z)+iF_2(y,z)=0$$
$$F_1(y,z)-iF_2(y,z)=0,$$

also $F_1(y,z)=0,\ F_2(y,z)=0.$

Die Gleichung $F_1(y,z)=0$ enthält nur gerade Potenzen von z, die $F_2(y,z)=0$ hat die Form

$$z(b_0+b_2z^2+\ldots)=0,$$

oder wenn man $z=0$ ausschließt, da dies einer reellen Wurzel entspricht:

$$b_0+b_2z^2+\ldots\ldots=0,$$

so daß auch sie nur gerade Potenzen von z enthält.

Aus den zwei Gleichungen $F_1(y,z)=0$, $F_2(y,z)=0$ schaffe man die höchsten Potenzen von z weg und dann die niedersten (z nicht

---

*) Von jetzt an tritt nämlich das in §. 3 gelehrte Verfahren vollständig ein.

enthaltenden) Glieder, so erhält man zwei neue Gleichungen, mit denen man eben so verfährt, ... bis man endlich eine Gleichung erhält, die kein z, bloß y enthält. Aus dieser lassen sich die Werthe von y bestimmen, von denen nur die reellen zu beachten sind. Hat man einen reellen Werth von y, so setze man ihn in die erhaltene Gleichung, in der bloß z^2 vorkommt, so erhält man z^2, welches immer positiv ausfallen muß; negative, oder gar imaginäre Werthe von z^2 sind zu verwerfen. Dadurch erhält man den zu dem gefundenen y gehörigen Werth von z^2. Wäre die Gleichung, die bloß z^2 enthält, von selbst Null, vermöge des betrachteten Werthes von y, so müßte man die Gleichung, die auch z^4 erhält, in Betracht ziehen u. s. w., in welchem Falle zu dem gefundenen y mehrere z^2 gehörten.

Wählen wir ein Beispiel. Die Gleichung

$$x^5+x^4+x^3-2x^2+2x-1=0$$

hat eine einzige reelle Wurzel, die sich $=0{\cdot}64074596$ findet, und also vier imaginäre Wurzeln.

Man setze nun $x=y+iz$, so ist:

$$y^5+y^4+y^3-2y^2+2y-1+(-10y^3-6y^2-3y+2)z^2$$
$$+(5y+1)z^4=a_0+a_2z^2+a_4z^4=0,$$
$$5y^4+4y^3+3y^2-2y+2+(-10y^2-4y-1)z^2+z^4=0$$
$$=b_0+b_2z^2+z^4. \qquad (26)$$

Multiplizirt man die zweite mit a_4 und subtrahirt:

$$a_0-b_0a_4+(a_2-b_2a_4)z^2=0; \qquad (27)$$

multiplizirt man dagegen die erste mit b_0, die zweite mit a_0, subtrahirt und dividirt durch z^2:

$$a_2b_0-a_0b_2+(a_4b_0-a_0)z^2=0. \qquad (28)$$

Aus (27) und (28) folgt:

$$(a_0-b_0a_4)(a_4b_0-a_0)-(a_2b_0-a_0b_2)(a_2-b_2a_4)=0, \qquad (29)$$

welche Gleichung vom 10ten Grade in y ist. Diese Gleichung hat zwei reelle Wurzeln ($0{\cdot}3170412$ und $-1{\cdot}1374142$). Um die entsprechenden Werthe von z^2 zu finden, setzt man jeden dieser Werthe in (28) oder (27) und findet: $z^2=0{\cdot}4253434$ und $1{\cdot}6741603$, so daß

$$0{\cdot}3170412 \pm \sqrt{0{\cdot}0253434}\,.\,i,$$
$$-1{\cdot}1374142 \pm \sqrt{1{\cdot}6741603}\,.\,i$$

die imaginären Wurzeln sind.

Wäre die Gleichung (28) identisch Null gewesen, so hätte man auf die Gleichungen (26) zurückgehen müssen.

Anhang.

I.

Die trigonometrischen Funktionen für imaginäre Bögen u. s. w.

1) Um den Begriff von $\sin(a+bi)$ festzustellen, werden wir, wie dies in ähnlichem Falle in Abschnitt VII., Seite 34, geschehen ist, diese Größe als die Summe der immer konvergenten Reihe

$$\frac{a+bi}{1}-\frac{(a+bi)^3}{1.\,2.\,3}+\frac{(a+bi)^5}{1.\,2.\,3.\,4.\,5}-\ldots$$

betrachten.

Setzt man $a+bi=r(\cos\alpha+i\sin\alpha)$, so ist diese Reihe

$$r\cos\alpha-\frac{r^3\cos 3\alpha}{1.\,2.\,3}+\frac{r^5\cos 5\alpha}{1\ldots 5}-\ldots+i\left[r\sin\alpha-\frac{r^3\sin^3\alpha}{1.\,2.\,3}+\ldots\right],$$

deren Summe aus Abschnitt VII., S. 34 folgt, wenn man in (22) setzt $\frac{\pi}{2}\pm\alpha$ statt α und addirt oder subtrahirt:

$$\left(\frac{e^{r\sin\alpha}+e^{-r\sin\alpha}}{2}\right)\sin(r\cos\alpha)+i\left(\frac{e^{r\sin\alpha}-e^{-r\sin\alpha}}{2}\right)\cos(r\cos\alpha)$$

$$=\frac{e^{b}+e^{-b}}{2}\sin a+i\,\frac{e^{b}-e^{-b}}{2}\cos a,$$

so daß also

$$\sin(a+bi)=\frac{e^{b}+e^{-b}}{2}\sin a+i.\frac{e^{b}-e^{-b}}{2}\cos a. \quad (1)$$

Ganz eben so findet sich:

$$\cos(a+bi) = \frac{e^b+e^{-b}}{2}\cos a + i\,\frac{e^{-b}-e^b}{2}\sin a. \quad (2)$$

Daraus ergibt sich auch, daß die in Abschnitt VII., S. 35 aufgestellten Gleichungen:

$$\cos x = \frac{e^{xi}+e^{-xi}}{2},\ \sin x = \frac{e^{xi}-e^{-xi}}{2i}, \quad (3)$$

für jedes imaginäre x gelten.

Aus (1) und (2) folgt auch:

$$\cos b i = \frac{e^{-b}+e^b}{2},\ \sin b i = \frac{e^b-e^{-b}}{2}\,i,$$

und dann

$$\cos(a\pm bi) = \cos a \cos bi \mp \sin a \sin bi,$$

$$\sin(a\pm bi) = \sin a \cos bi \pm \cos a \sin bi,$$

$$\sin\left[\frac{\pi}{2}-(a+bi)\right] = \cos(a+bi),$$

$$\sin^2(a+bi)+\cos^2(a+bi) = 1, \text{ u. s. w.}$$

2) Es ist, wie aus (1) und (2) sich ergibt:

$$tg(a+bi) = \frac{\sin(a+bi)}{\cos(a+bi)} = \frac{2\sin 2a + i(e^{2b}-e^{-2b})}{2\cos 2a + e^{2b}+e^{-2b}},$$

$$cotg(a+bi) = \frac{\cos(a+bi)}{\sin(a+bi)} = \frac{2\sin 2a + i(e^{-2b}-e^{2b})}{e^{2b}+e^{-2b}-2\cos 2a},$$

$$tg(a+bi) \cdot cotg(a+bi) = 1.$$

Man wird z. B. die erste dieser Gleichungen finden, wenn man in $\frac{\sin(a+bi)}{\cos(a+bi)}$ Zähler und Nenner mit $(e^b+e^{-b})\cos a - i(e^{-b}-e^b)\sin a$ multiplizirt.

3) Man ist nach dem Obigen offenbar berechtigt, anzunehmen,

$$arc(\sin = \alpha+\beta i) = a+bi,$$

so daß

$$\alpha+\beta i = \sin(a+bi) = \frac{e^b+e^{-b}}{2}\sin a + i.\frac{e^b-e^{-b}}{2}\cos a,$$

und also

$$\frac{e^b+e^{-b}}{2}\sin a = \alpha,\ \frac{e^b-e^{-b}}{2}\cos a = \beta,$$

woraus

$$e^{b}=\frac{\alpha}{\sin a}+\frac{\beta}{\cos a},\ e^{-b}=\frac{\alpha}{\sin a}-\frac{\beta}{\cos a},$$

und mithin, wenn man multiplizirt:

$$\frac{\alpha^2}{\sin^2 a}-\frac{\beta^2}{\cos^2 a}=1.$$

Da aber $\sin^2 a+\cos^2 a=1$, so erhält man aus dieser Gleichung:

$$\cos^2 a=\frac{1-\alpha^2-\beta^2}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{1-\alpha^2-\beta^2}{2}\right)^2+\beta^2},$$

und

$$\sin^2 a=\frac{1+\alpha^2+\beta^2}{2}\mp\sqrt{\left(\frac{1+\alpha^2+\beta^2}{2}\right)^2-\alpha^2};$$

die beiden unter dem Wurzelzeichen stehenden Größen sind gleich, und da offenbar

$$\sqrt{\left(\frac{1-\alpha^2-\beta^2}{2}\right)^2+\beta^2}=\sqrt{\left(\frac{\alpha^2+\beta^2-1}{2}\right)^2+\beta^2}>\frac{1-\alpha^2-\beta^2}{2}$$

und immer $\cos^2 a>0$, so muß man das obere Zeichen wählen und also setzen:

$$\cos^2 a=\frac{1-\alpha^2-\beta^2}{2}+\sqrt{\left(\frac{1-\alpha^2-\beta^2}{2}\right)^2+\beta^2},$$

$$\sin^2 a=\frac{1+\alpha^2+\beta^2}{2}-\sqrt{\left(\frac{1+\alpha^2+\beta^2}{2}\right)^2-\alpha^2},$$

was auch, wie man leicht findet, gleich ist mit:

$$\cos^2 a=\frac{\beta^2}{\sqrt{\left(\frac{1-\alpha^2-\beta^2}{2}\right)^2+\beta^2}-\frac{1-\alpha^2-\beta^2}{2}},$$

$$\sin^2 a=\frac{\alpha^2}{\sqrt{\left(\frac{1+\alpha^2+\beta^2}{2}\right)^2-\alpha^2}+\frac{1+\alpha^2+\beta^2}{2}}.$$

Da man hat $\frac{e^{b}+e^{-b}}{2}\sin a=\alpha$, so sind $\sin a$ und α immer von gleichem Zeichen, mithin folgt aus der letzten Gleichung:

$$\sin a=\frac{\alpha}{\left[\sqrt{\left(\frac{1+\alpha^2+\beta^2}{2}\right)^2-\alpha^2}+\frac{1+\alpha^2+\beta^2}{2}\right]^{\frac{1}{2}}}$$

a ist demnach einer der Bögen, deren Sinus durch diese Formel bestimmt ist. Sei nun A der kleinste dieser Bögen, der also zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ liegt, so ist allgemein

$$a = A \pm 2m\pi \text{ oder } a = \pi - A \pm 2m\pi,$$

wenn m eine positive ganze Zahl ist. Man kann dies auch darstellen durch

$$a = \frac{\pi}{2} \pm \left(A - \frac{\pi}{2}\right) \pm 2m\pi.$$

Nun ist

$$b = l.\left(\frac{\alpha}{\sin a} + \frac{\beta}{\cos a}\right) = l\left(\frac{\alpha}{\sin A} \pm \frac{\beta}{\cos A}\right)$$

$$= \pm l\left(\frac{\alpha}{\sin A} + \frac{\beta}{\cos A}\right),$$

worin das Doppelzeichen dem in a entspricht, d. h. in beiden Formeln zugleich die obern oder zugleich die untern Zeichen gelten. Da auch $\frac{\alpha^2}{\sin^2 a} - \frac{\beta^2}{\cos^2 a} = 1 = \frac{\alpha^2}{\sin^2 A} - \frac{\beta^2}{\cos^2 A} = \left(\frac{\alpha}{\sin A} + \frac{\beta}{\cos A}\right)$ $\left(\frac{\alpha}{\sin A} - \frac{\beta}{\cos A}\right)$, so ist $l\left(\frac{\alpha}{\sin A} - \frac{\beta}{\cos A}\right) = -l\left(\frac{\alpha}{\sin A} + \frac{\beta}{\cos A}\right)$, wie angenommen wurde. Da A zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ liegt, so ist cos A positiv, und da $\cos^2 A = \cos^2 a$, so ist also

$$\cos A = \frac{\sqrt{\beta^2}}{\left[\sqrt{\left(\frac{1-\alpha^2-\beta^2}{2}\right)^2 + \beta^2} - \frac{1-\alpha^2-\beta^2}{2}\right]^{\frac{1}{2}}},$$

$$\sin A = \frac{\alpha}{\left[\sqrt{\left(\frac{1+\alpha^2+\beta^2}{2}\right)^2 - \alpha^2} + \frac{1+\alpha^2+\beta^2}{2}\right]^{\frac{1}{2}}}.$$

Bezeichnet man also, wie früher, in der zweiten Seite der folgenden Gleichung mit arc(sin = x) den dem Zahlenwerthe nach kleinsten Bogen $\left(\text{zwischen} -\frac{1}{2}\pi \text{ und } +\frac{1}{2}\pi\right)$, dessen Sinus x ist, so findet man endlich:

$$\mathrm{arc}(\sin=\alpha+\beta i)=\frac{\pi}{2}\pm\left[\mathrm{arc}\left(\sin=\frac{\alpha}{\left[\sqrt{\left(\frac{1+\alpha^2+\beta^2}{2}\right)^2-\alpha^2}+\frac{1+\alpha^2+\beta^2}{2}\right]^{\frac{1}{2}}}\right)\right.$$

$$+il\left\{\left[\sqrt{\left(\frac{1+\alpha^2+\beta^2}{2}\right)^2-\alpha^2}+\frac{1+\alpha^2+\beta^2}{2}\right]^{\frac{1}{2}}\right.$$

$$\left.\left.+\frac{\beta}{\sqrt{\beta^2}}\left[\sqrt{\left(\frac{1-\alpha^2-\beta^2}{2}\right)^2+\beta^2}-\frac{1-\alpha^2-\beta^2}{2}\right]^{\frac{1}{2}}\right\}-\frac{\pi}{2}\right]$$

$$\pm 2m\pi, \qquad (4)$$

in welcher Formel den Wurzelgrößen nur positive Werthe beigelegt werden dürfen. Die Größe $\frac{\beta}{\sqrt{\beta^2}}$ ist $+1$ oder -1, je nachdem β positiv oder negativ ist.

Sei $\beta=0$ und $\frac{\beta}{\sqrt{\beta^2}}=+1$, so ist der allgemeine Werth von

$$\mathrm{arc}(\sin=\alpha)=\frac{\pi}{2}\pm\left[\mathrm{arc}\left(\sin=\frac{\alpha}{\left[\sqrt{\left(\frac{1-\alpha^2}{2}\right)^2}+\frac{1+\alpha^2}{2}\right]^{\frac{1}{2}}}\right)\right.$$

$$+il\left\{\left[\sqrt{\left(\frac{1-\alpha^2}{2}\right)^2}+\frac{1+\alpha^2}{2}\right]^{\frac{1}{2}}\right.$$

$$\left.\left.+\left[\sqrt{\left(\frac{1-\alpha^2}{2}\right)^2}-\frac{1-\alpha^2}{2}\right]^{\frac{1}{2}}\right\}-\frac{\pi}{2}\right]\pm 2m\pi.$$

Ist nun $\alpha^2<1$, so ist $\sqrt{\left(\frac{1-\alpha^2}{2}\right)^2}=\frac{1-\alpha^2}{2}$ und dann der allgemeine Werth von $\mathrm{arc}(\sin=\alpha)=$

$$\frac{\pi}{2}\pm\left[\mathrm{arc}(\sin=\alpha)-\frac{\pi}{2}\right]\pm 2m\pi. \qquad (5)$$

Ist $\alpha^2>1$, so ist $\sqrt{\left(\frac{1-\alpha^2}{2}\right)^2}=\frac{\alpha^2-1}{2}$ und dann

$$\mathrm{arc}(\sin=\alpha)=\frac{\pi}{2}\pm\left[\mathrm{arc}\left(\sin=\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2}}\right)+il(\sqrt{\alpha^2}+\sqrt{\alpha^2-1})-\frac{\pi}{2}\right]$$

$$\pm 2m\pi. \qquad (6)$$

worin $\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2}}=\pm 1$, je nachdem α positiv oder negativ, $\sqrt{\alpha^2}$ immer positiv ist.

Für $\alpha=0$ ist der allgemeine Werth von:

$$\operatorname{arc}(\sin=\beta i)=\frac{\pi}{2}\pm\left[i\,l\left\{\sqrt{1+\beta^2}+\beta\right\}-\frac{\pi}{2}\right]\pm 2m\pi. \qquad (7)$$

Die beiden Doppelzeichen in jeder der Formeln (4) bis (7) sind von einander ganz unabhängig.

4) Was den allgemeinen Werth von $\operatorname{arc}(\cos=\alpha+\beta i)$ anbelangt, so ist er

$$\frac{\pi}{2}-\operatorname{arc}(\sin=\alpha+\beta i).$$

5) Sei der allgemeine Werth von $\operatorname{arc}(\operatorname{tg}=\alpha+\beta i)=a+bi$, so ist

$$\alpha+\beta i=\operatorname{tg}(a+bi)=\frac{2\sin 2a+i\left(e^{2b}-e^{-2b}\right)}{e^{2b}+e^{-2b}+2\cos 2a},$$

also

$$\frac{2\sin 2a}{2\cos 2a+e^{2b}+e^{-2b}}=\alpha,\quad \frac{e^{2b}-e^{-2b}}{2\cos 2a+e^{2b}+e^{-2b}}=\beta.$$

Hieraus:

$$e^{2b}=\frac{1+\beta}{\alpha}\sin 2a-\cos 2a,$$

$$e^{-2b}=\frac{1-\beta}{\alpha}\sin 2a-\cos 2a. \qquad (8)$$

Durch Multiplikation ergibt sich hieraus:

$$1=\frac{1-\beta^2}{\alpha^2}\sin^2 2a-\frac{2\sin 2a\cos 2a}{\alpha}+\cos^2 2a,$$

d. h.

$$0=\frac{1-\beta^2-\alpha^2}{\alpha^2}\operatorname{tg}^2 2a-\frac{2}{\alpha}\operatorname{tg}2a,$$

aus welcher Gleichung $\operatorname{tg}2a$ folgt, wenn nicht zugleich $\alpha=0$, $\beta^2=1$. Aus derselben folgt entweder $\operatorname{tg}2a=0$, was offenbar unzulässig ist, oder

$$\operatorname{tg}2a=\frac{2\alpha}{1-\beta^2-\alpha^2},\text{ wenn nicht } \alpha=0,\ \beta^2=1.$$

Ist A der kleinste Bogen, dessen Tangente $\frac{2\alpha}{1-\beta^2-\alpha^2}$ ist, $\left(\right.$zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $+\frac{\pi}{2}\left.\right)$, so ist

$$2a = A \pm 2m\pi,\quad a = \frac{A}{2} \pm m\,\pi,$$

wenn m eine positive ganze Zahl ist. Dem Anschein nach dürfte man $2a = A \pm m\pi$ setzen, da $tg(A \pm m\pi) = tg A$ ist, allein wenn m eine ungerade Zahl ist, so haben $\cos(A \pm m\pi)$ und $\sin(A \pm m\pi)$ nicht dasselbe Zeichen wie cos A und sin A; d. h. für $m=0$, wo dann $2a = A$ und z. B. für $m=1$, wo dann $2a = A \pm \pi$, sind cos A, sin A und $\cos(A \pm \pi)$ $\sin(A \pm \pi)$ von verschiedenem Zeichen, also würden in den Formeln (8) die zweiten Seiten ihr Zeichen wechseln für diese Werthe von 2a, was nicht sein darf, da sie immer positiv sein müssen, indem e^{2b} und e^{-2b} es sind.

Dividirt man die Formeln (8), so ergibt sich

$$b = \frac{1}{4} l.\left(\frac{(1+\beta)^2+\alpha^2}{(1-\beta)^2+\alpha^2}\right),$$

wenn man obigen Werth von tg2a beachtet. Also ist der allgemeine Werth von

$$arc(tg = \alpha + \beta i) = \frac{1}{2} arc\left(tg = \frac{2\alpha}{1-\beta^2-\alpha^2}\right)$$
$$+ \frac{i}{4} l\left(\frac{(1+\beta)^2+\alpha^2}{(1-\beta)^2+\alpha^2}\right) \pm m\,\pi, \qquad (9)$$

wenn auf der zweiten Seite für arc $\left(tg = \frac{2\alpha}{1-\beta^2-\alpha^2}\right)$ der dem Zahlenwerthe nach kleinste Bogen gewählt wird, und nicht zugleich $\alpha = 0$, $\beta^2 = 1$.

Für $\alpha = 0$:

$$arc(tg = \beta i) = \frac{i}{2} l\left(\frac{1+\beta}{1-\beta}\right) \pm m\pi, \qquad (10),$$

wenn nicht $\beta^2 = 1$.

5) Nun ist der allgemeine Werth von

$$arc(cotg = \alpha + \beta i) = \frac{\pi}{2} - arc(tg = \alpha + \beta i).$$

6) Nach Abschnitt IX., Seite 53 *) und Abschnitt VIII., S. 48 ist, so lange die betreffenden Reihen konvergent sind:

$$\text{arc}\left(\text{tg}=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)=\frac{x}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}-\frac{1}{3}\cdot\frac{x^3}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$+\frac{1}{5}\cdot\frac{x^5}{(1-x^2)^{\frac{5}{2}}}-\ldots\ldots$$

$$=x\left(1+\frac{x^2}{2}+\frac{1.3}{2.4}\cdot x^4+\frac{1.3.5}{2.4.6}x^6+\ldots\right)$$

$$-\frac{x^3}{3}\left(1+\frac{3}{2}\cdot x^2+\frac{3.5}{2.4}x^4+\frac{3.5.7}{2.4.6}x^6+\ldots\right)$$

$$+\frac{x^5}{5}\left(1+\frac{5}{2}x^2+\frac{5.7}{2.4}x^4+\frac{5.7.9}{2.4.6}x^6+\ldots\right)$$

$$-\ldots\ldots$$

Der Koeffizient von x^{2n+1} in dieser Entwicklung ist offenbar:

$$\frac{1.3\ldots(2n-1)}{2.4\ldots\ldots 2n}-\frac{1}{3}\cdot\frac{3.5\ldots(2n-1)}{2.4\ldots(2n-2)}+\frac{1}{5}\cdot\frac{5.7\ldots(2n-1)}{2.4\ldots(2n-4)}$$

$$-\ldots\pm\frac{1}{2n+1}$$

$$=\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots\ldots 2n}\left[1-\frac{1}{3}\cdot\frac{2n}{1}+\frac{1}{5}\cdot\frac{2n(2n-2)}{1.\ 3}\right.$$

$$\left.-\ldots\pm\frac{1}{2n+1}\cdot\frac{2n(2n-2)\ldots 2}{1.\ 3\ldots(2n-1)}\right].$$

Setzt man aber in der Formel (3) in Abschnitt V.: $a=-2n$, $c=2$, $b=3$, so findet sich, wenn man $n-1$ statt n setzt:

$$-\frac{2n}{3}+\frac{2n(2n-2)}{3.\ 5}-\frac{2n(2n-2)\ (2n-4)}{3.\ 5.\ \ 7}$$

$$+\ldots\ldots\pm\frac{2n(2n-2)\ldots 2}{3.\ 5\ldots(2n+1)}$$

$$=\frac{-2n}{-2n-1}\left(\frac{(-2n+2)\ldots(-2n+2n)}{3.\ 5\ldots\ldots(2n+1)}-1\right),$$

$$=-\frac{2n}{2n+1},$$

*) Setzt man in Abschnitt IX., S. 53, Formel (5) für die zweite Seite das so eben in (9) gefundene Ergebniß, so sieht man, daß, so lange die Reihe konvergent ist:

$$\frac{x}{1}-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\ldots=\text{arc}(\text{tg}=x),$$

wenn man für arc(tg=x) den einfachsten Werth nimmt, d. h. in Formel (9) m=0 setzt.

also ist

$$1-\frac{1}{3}\cdot\frac{2n}{1}+\frac{1}{5}\cdot\frac{2n(2n-2)}{1.\,3}-\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot$$

$$\pm\frac{1}{2n+1}\cdot\frac{2n(2n-2)\ldots 2}{1.\;3\ldots(2n-1)}=1-\frac{2n}{2n+1}=\frac{1}{2n+1}.$$

Mithin ist endlich:

$$\operatorname{arc}\left(\operatorname{tg}=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)=x+\frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3}+\frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{x^5}{5}+$$

$$\frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{x^7}{7}+\cdot\cdot\cdot\cdot, \qquad (10)$$

in so ferne die Reihe konvergent ist. Setzt man $x=r(\cos\alpha+i\sin\alpha)$, so findet man nach Abschnitt VI. (VI.), (S. 23): daß fragliche Reihe konvergent ist für $r<1$. Da nach Formel (2) in Abschn. V. (S. 20):

$$\left(1-\frac{a(a+c)\ldots(a+nc)}{b(b+c)\ldots(b+nc)}\right)\cdot\frac{1}{b-a}=\frac{1}{b}+\frac{a}{b}\cdot\frac{1}{b+c}+$$

$$\frac{a(a+c)}{b(b+c)}\cdot\frac{1}{b+2c}+\ldots+\frac{a(a+c)\;\ldots(a+\overline{n-1}c)}{b(b+c)\;\ldots(b+\overline{n-1}c)}\cdot\frac{1}{b+nc},$$

und die Größe $\frac{a(a+c)\ldots(a+nc)}{b(b+c)\ldots(b+nc)}$ offenbar für jedes noch so große n endlich ist, wenn $b>a$, so ist also, wenn man n unendlich groß werden läßt, die Reihe

$$\frac{1}{b}+\frac{a}{b}\cdot\frac{1}{b+c}+\frac{a(a+c)}{b(b+c)}\cdot\frac{1}{b+2c}+$$

$$\frac{a(a+c)(a+2c)}{b(b+c)(b+2c)}\cdot\frac{1}{b+3c}+\cdot\cdot\cdot\cdot$$

konvergent für $b>a$. Setzt man $b=2$, $a=1$, $c=2$, so ist also die unendliche Reihe

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{1}{6}+\frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{1}{8}+\cdot\cdot\cdot$$

konvergent, also auch das Doppelte derselben:

$$1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{1}{4}+\cdot\cdot\cdot$$

und also um so mehr die unendliche Reihe:

$$1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{1}{5}+\frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{1}{7}+\cdot\cdot\cdot\cdot$$

konvergent. Folglich ist die Reihe (10) auch konvergent für $r=1$.

Sei nun $\text{arc}\left(\text{tg} = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right) = z$, so ist $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \text{tg}\, z$, $x^2 = \frac{\text{tg}^2 z}{1+\text{tg}^2 z} = \frac{\sin^2 z}{\sin^2 z + \cos^2 z} = \sin^2 z$ (nach 1.), also $\sin z = \pm\sqrt{x^2} = \pm x$.

Ist x reell, so liegt z zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $+\frac{\pi}{2}$, also hat sin z dasselbe Zeichen wie x, d. h. man wird setzen müssen $\sin z = x$; ist aber x imaginär $= a + b\, i$, so wird auch z imaginär sein, und zwar bestimmt durch die Formel (9), wenn in ihr $m = 0$, wenn man für α und β die gehörigen Werthe setzt. Immerhin wird man aber auch setzen müssen $\sin z = x$, da die Annahme $b = 0$ an dem Vorzeichen offenbar nichts ändert und alsdann ja $\sin z = x$ ist. Also hat man, wenn

$$\text{arc}\left(\text{tg} = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right) = z,\ \sin z = x,\ x = r(\cos\alpha + i \sin\alpha) = a + b\, i.$$

z ist also auch einer der Bögen, deren Sinus x ist. Diese sind alle durch die Formel (4) gegeben; in unserm Falle aber hat man den zu wählen, für den dort $m=0$, und das obere Zeichen gilt, d. h. so daß

$$z = \text{arc}\left(\sin = \frac{a}{\left[\sqrt{\left(\frac{1+a^2+b^2}{2}\right)^2 - a^2} + \frac{1+a^2+b^2}{2}\right]^{\frac{1}{2}}}\right)$$
$$+ i\, l\left\{\left[\sqrt{\left(\frac{1+a^2+b^2}{2}\right)^2 - a^2} + \frac{1+a^2+b^2}{2}\right]^{\frac{1}{2}}\right.$$
$$\left. + \frac{b}{\sqrt{b^2}}\left[\sqrt{\left(\frac{1-a^2-b^2}{2}\right)^2 + b^2} - \frac{1-a^2-b^2}{2}\right]^{\frac{1}{2}}\right\}$$

ist. Man überzeugt sich von der Richtigkeit dieser Behauptung in derselben Weise wie so eben. Für $b=0$ muß nämlich $z = \text{arc}(\sin = a)$ werden, was nur in diesem Falle zutrifft.

Demnach kann man endlich setzen für $x = r(\cos\alpha + i \sin\alpha) =$

$$x + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4} \cdot \frac{x^5}{5} + \ldots = \text{arc}(\sin = x), \qquad (11)$$

wenn man in der Bestimmung von $\text{arc}(\sin = x)$ nach (4) setzt $m=0$ und das obere Zeichen wählt. Diese Formel ist giltig für alle Werthe von α, wenn nicht $r > 1$. Man leitet daraus ab:

$$r\cos\alpha + \frac{1}{2}\cdot\frac{r^3\cos3\alpha}{3} + \frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{r^5\cos5\alpha}{5} + \dots$$

$$= \mathrm{arc}\left(\sin = \frac{r\cos\alpha}{\left[\sqrt{\left(\frac{1+r^2}{2}\right)^2 - r^2\cos^2\alpha} + \frac{1+r^2}{2}\right]^{\frac{1}{2}}}\right),$$

$$r\sin\alpha + \frac{1}{2}\cdot\frac{r^3\sin3\alpha}{3} + \frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{r^5\sin5\alpha}{5} + \dots$$

$$= l.\left\{\left[\sqrt{\left(\frac{1+r^2}{2}\right)^2 - r^2\cos^2\alpha} + \frac{1+r^2}{2}\right]^{\frac{1}{2}} + \frac{\sin\alpha}{\sqrt{\sin^2\alpha}}\left[\sqrt{\left(\frac{1-r^2}{2}\right)^2 + r^2\sin^2\alpha} - \frac{1-r^2}{2}\right]^{\frac{1}{2}}\right\}. \quad (12)$$

Beide Formeln gelten für jedes α, wenn nicht $r > 1$. Für $r = 1$ gibt die zweite:

$$\sin\alpha + \frac{1}{2}\cdot\frac{\sin3\alpha}{3} + \frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{\sin5\alpha}{5} + \dots$$

$$= l.\left[\sqrt{1 + \sqrt{\sin^2\alpha} + \frac{\sin\alpha}{\sqrt{\sin^2\alpha}}\sqrt{\sin^2\alpha}}\right]$$

$$= l.\left[\sqrt{1 + \sqrt{\sin^2\alpha} + \sin\alpha}\right]. \quad (13)$$

Die erste gibt:

$$\cos\alpha + \frac{1}{2}\cdot\frac{\cos3\alpha}{3} + \frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{\cos5\alpha}{5} + \dots$$

$$= \mathrm{arc}\left(\sin = \frac{\cos\alpha}{\left[1 + \sqrt{\sin^2\alpha}\right]^{\frac{1}{2}}}\right). \quad (14)$$

Daraus folgt für $\alpha = 0$:

$$1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{1}{5} + \dots = \frac{\pi}{2}. \quad (15)$$

Für $\alpha = \frac{\pi}{2}$ folgt aus (13):

$$1 - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{1}{5} - \frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{1}{7} + \dots$$

$$= l.\left[1 + \sqrt{2}\right]. \quad (16)$$

Aehnliche Formeln leiten sich sehr leicht weiter ab.

Es könnte bei obigen Ableitungen ein Zweifel über die Richtigkeit

dadurch entstehen, daß vielleicht die angewandten Reihen nicht alle konvergent sind in derselben Ausdehnung wie die Reihe (12). Darüber aber wird dann das im VI. Abschnitt IX. (S. 26) Gesagte beruhigen.

II.

Allgemeine Auflösung von n Gleichungen des ersten Grades mit n Unbekannten.

Wir wollen annehmen, man habe n Gleichungen des ersten Grades mit den n Unbekannten $x_1, x_2, \ldots, x_n$, und dieselben in folgender Weise darstellen:

$$
\begin{array}{l}
1_1 x_1 + 2_1 x_2 + 3_1 x_3 + \ldots + n_1 x_n = I_1, \\
1_2 x_1 + 2_2 x_2 + 3_2 x_3 + \ldots + n_2 x_n = I_2, \\
\vdots \\
1_n x_1 + 2_n x_2 + 3_n x_3 + \ldots + n_n x_n = I_n, \qquad (1)
\end{array}
$$

in welchen Gleichungen die Größen $1_1, 2_1, \ldots, 1_2, 2_2, \ldots, \ldots n_n$ so wie $I_1, \ldots I_n$ bestimmte Koeffizienten ausdrücken. Die Bezeichnungsweise ist in so ferne deutlich, als etwa 3_4 den dritten Koeffizienten in der vierten Gleichung ausdrückt u. s. w. Die Zahlen $I_1, I_2, \ldots$ sind die von den Unbekannten freien Koeffizienten der Gleichungen.

Es mögen nun $p_1, p_2, \ldots p_n$ gewisse, noch unbestimmte Zahlen vorstellen, und man multiplizire die Gleichungen (1) mit denselben, addire dann, so ist:

$$
\left.
\begin{array}{l}
(1_1 p_1 + 1_2 p_2 + 1_3 p_3 + \ldots + 1_n p_n) x_1 \\
+ (2_1 p_1 + 2_2 p_2 + 2_3 p_3 + \ldots + 2_n p_n) x_2 \\
\vdots \\
+ (n_1 p_1 + n_2 p_2 + n_3 p_3 + \ldots + n_n p_n) x_n
\end{array}
\right\} = I_1 p_1 + I_2 p_2 + \ldots I_n p_n. \qquad (2)
$$

Gesetzt nun, man sei im Stande, $p_1, p_2, \ldots \ldots p_n$ so zu bestimmen, daß

$$\left.\begin{array}{l} 2_1p_1+2_2p_2+\ \ldots\ +2_np_n=0 \\ \vdots \\ n_1p_1+n_2p_2+\ \ldots\ +n_np_n=0 \end{array}\right\}\quad(3)$$

so wird

$$x_1=\frac{I_1p_1+I_2p_2+\ \ldots\ +I_np_n}{1_1p_1+1_2p_2+\ \ldots\ +1_np_n}.\quad(4)$$

Die Aufgabe ist also darauf zurückgeführt, eine Größe

$$1_1p_1+1_2p_2+\ \ldots\ +1_np_n\quad(5)$$

zu bestimmen, die verschwindet, wenn man für die Reihe der Koeffizienten $1_1,\ 1_2,\ \ldots\ 1_n$ setzt:

$2_1,\ 2_2,\ \ldots\ 2_n$ oder $3_1,\ 3_2,\ \ldots\ 3_n$ u. s. f. bis $n_1,\ n_2,\ \ldots\ n_n$, wobei wir nun zugleich die Voraussetzung machen wollen, daß 1_1, $1_2,\ \ldots\ 1_n$ nicht in $p_1,\ p_2,\ \ldots\ p_n$ vorkommen. Die unten angehängten Ziffer sollen die Zeiger heißen; so ist bei 4_5 der Zeiger 5.

Man wird nun die Funktion (5) in folgender Weise bilden:

Man bilde aus den Elementen 1, 2, 3, ... n alle möglichen Versetzungen ohne Wiederholungen und schreibe jeder einzelnen Zusammenstellung die Zeiger 1, 2, ... n bei. Wenn in der betreffenden Zusammenstellung von den Elementen 1, 2, ... n, ohne Rücksicht auf die Zeiger, eine gerade Anzahl höherer Elemente vor niederern steht, so hat dieselbe das Zeichen +, im andern Falle das Zeichen −.

Alle diese Zusammenstellungen bilden dann die Funktion (5). Bei dem Zählen höherer Elemente vor niederern wird ein jedes höhere Element so oft gezählt, als es vor niederern steht. Sei z. B. n=4, so wird die Funktion (5) sein:

$$\begin{array}{llll}
+1_12_23_34_4 & -2_11_23_34_4 & +3_11_22_34_4 & -4_11_22_33_4 \\
-1_12_24_33_4 & +2_11_24_33_4 & -3_11_24_32_4 & +4_11_23_32_4 \\
-1_13_22_34_4 & +2_13_21_34_4 & -3_12_21_34_4 & +4_12_21_33_4 \\
+1_13_24_32_4 & -2_13_24_31_4 & +3_12_24_31_4 & -4_12_23_31_4 \\
+1_14_22_33_4 & -2_14_21_33_4 & +3_14_21_32_4 & -4_13_21_32_4 \\
-1_14_23_32_4 & +2_14_23_31_4 & -3_14_22_31_4 & +4_13_22_31_4
\end{array}$$

Setzt man $1_1,\ 1_2,\ \ldots\ 1_n$ als Faktoren mehrerer Glieder heraus, so sieht man, daß $p_1,\ \ldots\ p_n$ diese Größen, nach dem angegebenen Bildungsgesetz nicht enthalten, wie oben angenommen worden.

Den Beweis dieser von Kramer aufgestellten Regel wollen wir nach Grunert*) mittheilen.

---

*) Supplemente zu Klügel's math. Wörterbuch, Artikel Elimination.

Denken wir uns zwei Zusammenstellungen

$$A = \ldots\ldots r_m \ldots\ldots 1_{m+n} \ldots\ldots$$
$$B = \ldots\ldots 1_m \ldots\ldots r_{m+n} \ldots\ldots$$

die nur darin von einander verschieden sind, daß r und 1 (Elemente) vertauscht sind, so behaupte ich, daß A und B nach der Regel verschiedene Vorzeichen haben müssen.

Durch die Elemente 1 und r ist jede dieser Zusammenstellungen A und B in drei Abtheilungen gebracht, die wir durch I., II., III. bezeichnen wollen. Sobald ein höheres Element vor einem niederern steht, wollen wir sagen, das erste bilde eine Variation, so daß ein Element so viele Variationen bildet, als niederere nach ihm kommen. Gesetzt nun, in A und B bilden alle Elemente, 1 und r sich weggedacht, a Variationen. In A und B gebe r für die Elemente in III. b Variationen; in A geben die Elemente in I. und II. in Bezug auf 1 offenbar $m+n-2$, oder wenn r mitgenommen wird, $m+n-1$ Variationen. In A gebe r in Bezug auf die Elemente in II. c Variationen, so geben in B die Elemente in II. in Bezug auf r: $n-c-1$. Die Elemente in I. mögen in Bezug auf r in A und B d Variationen geben. In Bezug auf 1 sind in B offenbar $m-1$ Variationen. Sind also Δ und Δ' die Anzahlen sämmtlicher Variationen in A und B, so ist

$$\Delta = a+b+m+n-1+c+d,$$
$$\Delta' = a+b+n-c-1+d+m-1,$$

also $\Delta-\Delta'=2c+1$, d. h. $\Delta-\Delta'$ ist eine ungerade Zahl. Daraus folgt, daß wenn Δ gerade ist, Δ' ungerade und umgekehrt sein muß, so daß also A und B verschiedene Vorzeichen haben. Die zwei Zusammenstellungen A und B kommen aber in der Gesammtzahl aller vor, wenn $r=2,3,\ldots n$.

Denken wir uns nun die Größe (5) in der angegebenen Weise gebildet, so wird man sie in lauter solche Paare von Zusammenstellungen getheilt denken können, wie A und B, in denen je nur 1 mit 2 oder 3, ... oder n getauscht ist. Würde man also in derselben durchgängig statt 1 setzen 2, oder 3, ... oder n, so würde jedes einzelne Paar, da seine zwei Glieder jetzt gleich würden und verschiedenes Zeichen haben, verschwinden, also die ganze Größe. Demnach ist (5), wenn es nach der gegebenen Regel bestimmt wird, so beschaffen, daß diese Größe Null wird, wenn man durchweg für 1 setzt 2, oder 3, ..., oder n, wie dies verlangt wurde. Die Größe (5) ist nun der Nenner von x_1, den Zähler findet man, wenn man I. an die Stelle von 1 setzt.

Wollte man x_r bestimmen, so würde man nur x_r an die Stelle von x_1 getreten denken, d. h. x_r als die erste der Unbekannten betrachten.

Man wird aus dem Gesagten leicht ersehen, daß der Nenner aller Werthe von $x_1, x_2, .. x_n$ derselbe ist*), so wie daß die von $x_1, .. x_n$ freien Größen $I_1, ... I_n$ in demselben nicht vorkommen. In den Zählern sind diese Größen nie mit einander multiplizirt, und der Zähler von x_r enthält keinen der Koeffizienten $r_1, r_2, ... r_n$.

Löst man hiernach die Gleichungen

$$a_1x+b_1y+c_1z=d_1,$$
$$a_2x+b_2y+c_2z=d_2,$$
$$a_3x+b_3y+c_3z=d_3,$$

auf, so findet man:

$$x=\frac{d_1b_2c_3-d_1c_2b_3+c_1d_2b_3-b_1d_2c_3+b_1c_2d_3\quad c_1b_2d_3}{a_1b_2c_3-a_1c_2b_3+c_1a_2b_3-b_1a_2c_3+b_1c_2a_3-c_1b_2a_3},$$

$$y=\frac{a_1d_2c_3-a_1c_2d_3+c_1a_2d_3-d_1a_2c_3+d_1c_2a_3-c_1d_2a_3}{a_1b_2c_3-a_1c_2b_3+c_1a_2b_3-b_1a_2c_3+b_1c_2a_3-c_1b_2a_3},$$

$$z=\frac{a_1b_2d_3-a_1d_2b_3+d_1a_2b_3-b_1a_2d_3+b_1d_2a_3-d_1b_2a_3}{a_1b_2c_3-a_1c_2b_3+c_1a_2b_3-b_1a_2c_3+b_1c_2a_3-c_1b_2a_3}.$$

III.

Die Fourier'sche Näherungsmethode zur Bestimmung der reellen Wurzeln einer Gleichung.

1) Ehe wir diese Methode darstellen können, wollen wir noch eine dazu nöthige Formel nachweisen.

Im vierten Abschnitt der zweiten Abtheilung §. 10 wurde gezeigt, daß

$$f(x+z)=f(x)+zf_1(x)+\frac{z^2}{1.2}f_2(x)+\ldots,$$

---

*) Kommt z. B. bei der Bestimmung von x_r die Zusammenstellung .. 1_m ... r_{m+n} ... vor, so hat sie gleiches Zeichen mit .. r_m ... 1_{m+n} ... in dem Nenner von x_1, da jetzt 1 das rte, r das 1te Element ist. Letztere Größe hat aber nach dem Obigen entgegengesetztes Zeichen mit .... 1_m ... r_{m+n} .... in x_1, so daß ... 1_m .... r_{m+n} im Nenner von x_r entgegengesetztes Zeichen hat mit ... 1_m ... r_{m+n} ... in dem Nenner von x_1. Beide Nenner bestehen also aus den gleichen Zusammenstellungen und haben bloß verschiedenes Zeichen, was aber der obigen Behauptung keinen Eintrag thut.

also

$$f(x+z)-f(x)=z\,f_1(x)+\frac{z^2}{1.2}f_2(x)+\ldots.$$

Für ein kleines (positives) z kann man behaupten, daß das Zeichen des zweiten Gliedes von $f_1(x)$ abhängt (§. 2). Demnach wird bei positivem $f_1(x)$: $f(x+z)>f(x)$ und bei negativem $f_1(x)$ umgekehrt $f(x+z)<f(x)$ sein, so daß bei positivem $f_1(x)$ die Größe $f(x)$ wächst mit wachsendem x, bei negativem abnimmt mit wachsendem x.

Gesetzt nun, man lege in $f_1(x)$ dem x alle reellen Werthe von $x=x_0$ bis $x=x_1$ bei $(x_1>x_0)$; sei ferner $f(x_0)=0$, und a und b bezüglich der größte und kleinste Werth von $f_1(x)$ von all den so eben erhaltenen, so ist klar, daß $f_1(x)-a$ nie positiv, $f_1(x)-b$ nie negativ ist für alle Werthe von x innerhalb der angegebenen Gränzen. Ist nun $F(x)=f(x)-a(x-x_0)$, so ist offenbar $F_1(x)=f_1(x)-a$, und wenn $F(x)=f(x)-b(x-x_0)$, so ist $F_1(x)=f_1(x)-b$; da aber $f_1(x)-a$ nie positiv und $f_1(x)-b$ nie negativ ist, so wird von $x=x_0$ an die Größe $f(x)-b(x-x_0)$ wachsen mit wachsendem x, also da sie Null ist für $x=x_0$, so wird sie positiv sein von $x=x_0$ bis $x=x_1$. Eben so wird $f(x)-a(x-x_0)$ stets negativ sein für dieselben Werthe von x. Die Größen $f(x)-a(x-x_0)$, $f(x)-b(x-x_0)$ sind also immer von verschiedenem Zeichen, also auch $\frac{f(x)}{x-x_0}-a$, $\frac{f(x)}{x-x_0}-b$, d.h. $\frac{f(x)}{x-x_0}$ liegt immer zwischen a und b, oder zwischen dem größten und kleinsten Werthe von $f_1(x)$. Da aber $f_1(x)$ alle zwischen a und b liegenden Werthe erlangt, wenn x von x_0 bis x_1 wächst, so ist also $\frac{f(x)}{x-x_0}$ einem Werthe von $f_1(x)$ gleich, der zwischen den äußersten liegt. Deßgleichen ist $\frac{f(x_1)}{x_1-x_0}$ einem zwischen den äußersten liegenden Werthe von $f_1(x)$ gleich, den wir durch $f_1[x_0+\alpha(x_1-x_0)]$ bezeichnen können, wo α eine zwischen 0 und 1 liegende Zahl ist. Es ist klar, daß $x_0+\alpha(x_1-x_0)$ eine jede zwischen x_0 und x_1 liegende Zahl ausdrücken kann. Also ist

$$\frac{f(x_1)}{x_1-x_0}=f_1[x_0+\alpha(x_1-x_0)].$$

Setzen wir $f(x)=F(x)-F(x_0)$, wo $F(x)$ eine ganze Funktion von x ist, also $F(x_0)$ eine bestimmte Zahl, so ist $f_1(x)=F_1(x)$ und offenbar $f(x_0)=0$, also

$$\frac{F(x_1)-F(x_0)}{x_1-x_0}=F_1[x_0+\alpha(x_1-x_0)]$$

und daraus

$$F(x_1)=F(x_0)+(x_1-x_0)F_1(x_0+\alpha(x_1-x_0)). \qquad (1)$$

Da wenn $F(x)=f(x)-\frac{a}{2}(x-x_0)^2$, $F_1(x)=f_1(x)-a(x-x_0)$, $F_2(x)=f_2(x)-a$ und wenn $F(x)=f(x)-\frac{b}{2}(x-x_0)^2, F_1(x)=f_1(x)-b(x-x_0)$, $F_2(x)=f_2(x)-b$, so findet man wie oben, daß, wenn zu gleicher Zeit $f(x_0)=0$, $f_1(x_0)=0$ und a und b die äußersten Werthe von $f_2(x)$ von $x=x_0$ bis $x=x_1$ sind, immer $\frac{f(x)}{(x-x_0)^2}=\frac{1}{2}f_2(x_0+\alpha(x_1-x_0))$ ist. Denn dann sind $f_2(x)-a$ und $f_2(x)-b$ immer von verschiedenem Zeichen, also auch $f_1(x)-a(x-x_0)$ und $f_1(x)-b(x-x_0)$ und folglich auch $f(x)-\frac{a}{2}(x-x_0)^2$, $f(x)-\frac{b}{2}(x-x_0)^2$. Setzt man $f(x)=F(x)-F(x_0)-(x-x_0)F_1(x_0)$, so ist $f(x_0)=0$, $f_1(x_0)=0$, also

$$\frac{F(x_1)-F(x_0)-(x_1-x_0)F_1(x_0)}{(x_1-x_0)^2}=\frac{1}{2}F_2[x_0+\alpha(x_1-x_0)], \text{ d. h.}$$

$$F(x_1)=F(x_0)+(x_1-x_0)F_1(x_0)+\frac{(x_1-x_0)^2}{2}F_2(x_0+\alpha(x_1-x_0)). \qquad (2)$$

Alle diese Schlüsse gelten auch, wie man leicht sieht, wenn $x_1<x_0$.

2) Gesetzt man kenne zwei Gränzen a und b, zwischen denen eine einzige reelle Wurzel der Gleichung $f(x)=0$ liege und keine von $f_1(x)=0$ und $f_2(x)=0$, so daß $f_1(x)$ und $f_2(x)$ ihr Zeichen nicht wechseln von $x=a$ bis $x=b$. Zugleich sei $b>a$. Sei nun β Das, was man von b abziehen muß, um den wahren Werth von x zu erhalten, so daß $b-\beta=x$. Setzt man aber oben $x_0=b$, $x_1=b-\beta$, $x_1-x_0=-\beta$, so ist

$$f(b-\beta)=f(b)-\beta f_1(b-\varepsilon\beta),$$

also da $f(b-\beta)=0$:

$$\beta=\frac{f(b)}{f_1(b-\varepsilon\beta)},$$

wenn ε zwischen 0 und 1. Demnach ist die Wurzel:

$$b-\frac{f(b)}{f_1(b-\varepsilon\beta)}.$$

Sei eben so α Das, was zu a zugesetzt werden muß, um die Wurzel zu erhalten, so ist

$$f(a+\alpha)=f(a)+\alpha f_1(a+\varepsilon\alpha),$$

also wieder

$$\alpha = -\frac{f(a)}{f_1(a+\varepsilon\alpha)}$$

und die Wurzel $a-\frac{f(a)}{f_1(a+\varepsilon\alpha)}$. Wir haben nun vier Fälle zu unterscheiden:

a) Sei f(a) negativ und eben so $f_2(a)$.

Alsdann wächst f(x) von x=a bis x=b (da dann f(b) positiv ist), mithin auch $f_1(x)$ positiv von x=a bis x=b, $f_2(x)$ immer negativ. Also nimmt $f_1(x)$ ab von x=a bis x=b und hat also als größten Werth f(a). Nimmt man also oben für $f_1(b-\varepsilon\beta)$ den größten Werth, so ist dieser nicht größer als $f_1(a)$, demnach ist $b-\frac{f(b)}{f_1(a)}$ mehr als die wahre Wurzel, aber da $\frac{f(b)}{f_1(a)}$ positiv ist, nun näher an derselben als b. Deßgleichen ist $a-\frac{f(a)}{f_1(a)}$ weniger als die Wurzel, aber näher an derselben als a, da $-\frac{f(a)}{f_1(a)}$ positiv ist. Demnach sind $b-\frac{f(b)}{f_1(a)}$, $a-\frac{f(a)}{f_1(a)}$ zwei nähere Gränzen als b und a, und zwar die eine größer, die andere kleiner als die Wurzel.

b) Sei f(a) positiv und eben so $f_2(a)$.

Alsdann ist f(b) negativ, also $f_1(x)$ immer negativ, $f_2(x)$ positiv. Demnach ist der größte Werth von $f_1(x)$ jetzt, ohne Rücksicht auf das Zeichen, $f_1(a)$. Da jetzt $\frac{f(b)}{f_1(b-\varepsilon\beta)}$ positiv, $\frac{f(a)}{f_1(a+\varepsilon\alpha)}$ negativ ist, so findet man abermals als engere Gränzen von x:

$$b-\frac{f(b)}{f_1(a)},\ a-\frac{f(a)}{f_1(a)}.$$

c) Sei f(b) negativ und eben so $f_2(b)$.

Alsdann ist f(a) positiv, $f_1(x)$ immer negativ und eben so $f_2(x)$. Der absolut größte Werth von $f_1(x)$ ist also $f_1(b)$, und da $\frac{f(a)}{f_1(a+\varepsilon\alpha)}$ negativ, $\frac{f(b)}{f_1(b-\varepsilon\beta)}$ positiv, so sind die beiden engern Gränzen:

$$b-\frac{f(b)}{f_1(b)},\ a-\frac{f(a)}{f_1(b)}.$$

Sei $f(b)$ positiv und deßgleichen $f_2(b)$.

Man findet eben so, daß die engern Gränzen sind:

$$b - \frac{f(b)}{f_1(b)}, \; a - \frac{f(a)}{f_1(b)}.$$

Diese vier Fälle umfassen, wie man leicht ersieht, alle möglichen. Faßt man das Gesagte zusammen, so ergibt sich folgende Regel:

Seien a und b zwei Gränzen von x, zwischen denen eine einzige reelle Wurzel von $f(x)=0$ liegt und keine von $f_1(x)=0$, $f_2(x)=0$, so sind, wenn β die eine der zwei Gränzen (a oder b) bezeichnet, für die $f(x)$ und $f_2(x)$ von gleichem Zeichen sind:

$$b' = b - \frac{f(b)}{f_1(\beta)}, \; a' = a - \frac{f(a)}{f_1(\beta)}$$

zwei engere Gränzen, zwischen denen die Wurzel liegt. Verfährt man mit a', b' wie mit a und b, so erhält man zwei neue Gränzen a'', b'' u. s. w., so daß man sich dem Werthe der Wurzel immer mehr nähern kann.

3) Gesetzt nun, auch $f_3(x)=0$ habe keine reelle Wurzel zwischen a und b, so kann man den Grad der Näherung bestimmen.

Sei nämlich der Unterschied von a und b gleich d, der von a' und b' aber d', so daß

$$b - a = d, \; b' - a' = d',$$

so ist, da $b' = b - \frac{f(b)}{f_1(\beta)}$, $a' = a - \frac{f(a)}{f_1(\beta)}$ und $a = b - d$:

$$a' = b - d - \frac{f(a)}{f_1(\beta)} = b - d - \frac{f(b-d)}{f_1(\beta)} = b - d -$$

$$\frac{f(b) - d f_1(b) + \frac{d^2}{2} f_2(b - \varepsilon d)}{f_1(\beta)}.$$

Setzen wir überhaupt $\beta = b$, d. h. sei b die Gränze, für welche $f(x)$ und $f_2(x)$ von gleichem Zeichen sind, so ist also

$$b' - a' = d' = b - \frac{f(b)}{f_1(b)} - b + d + \frac{f(b)}{f_1(b)} - d +$$

$$\frac{d^2}{2} \frac{f_2(b - \varepsilon d)}{f_1(b)} = \frac{d^2}{2} \cdot \frac{f_2(b - \varepsilon d)}{f_1(b)}.$$

Da aber $f_3(x)$ sein Zeichen nicht ändert zwischen a und b, a' und b', . . ., so wird $f_2(x)$ zwischen denselben Gränzen von x stets wachsen oder abnehmen. Sei also $f_2(B)$ die absolut größte der beiden Größen $f_2(a)$ und $f_2(b)$, so ist (der Zahlwerth von)

$$d' \leqq \frac{d^2}{2} \cdot \frac{f_2(B)}{f_1(b)},$$

und da b' oder a' um weniger als d' von der wahren Wurzel verschieden sind, so hat man die Fehlergränze bestimmt.

Gesetzt $\frac{f_2(B)}{2f_1(b)}$ sei $< \left(\frac{1}{10}\right)^k$, $d \overline{\overline{<}} \left(\frac{1}{10}\right)^n$, so ist (immer absolut) $d' \overline{\overline{<}} \left(\frac{1}{10}\right)^{2n+k}$. Demnach ist bei der Berechnung von $\frac{f(b)}{f_1(b)}$, $\frac{f(a)}{f_1(b)}$ bis zur Dezimalstelle der Ordnung $\left(\frac{1}{10}\right)^{2n+k}$ zu gehen und $b - \frac{f(b)}{f_1(b)}$ ist bis zu jener Stelle genähert. Damit folglich überhaupt eine Näherung stattgefunden habe, muß sein $2n+k > n$, $n > -k$. Ist dies nicht der Fall, so waren die ursprünglichen Gränzen a und b nicht eng genug und sie müssen enger gezogen werden.

Beispiel:

$$f(x) = x^3 - 2x - 5 = 0.$$

Eine Wurzel liegt zwischen 2 und 3. $f_2(2) = 12$, $f_2(3) = 18$, also $B = 3$, $n = 0$, $b = 3$, $f_1(3) = 25$, $\frac{f_2(3)}{2f_1(3)} = \frac{18}{2.25} = 0{\cdot}3 \ldots.$, also $k = 0$, folglich nicht $n > -k$, also die Annäherung nicht eng genug.

Man findet, daß die fragliche Wurzel zwischen 2·0 und 2·1 liegt, während $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$ ihr Zeichen nicht wechseln. $f_2(B) = 12{\cdot}6$, $n = 1$, $b = 2{\cdot}1$, $f_1(b) > f_1(2) = 10$, also $\frac{f_2(B)}{2f_1(b)} > \frac{12{\cdot}6}{2{\cdot}10} = 0{\cdot}6$, d. h. $k = 0$, also $n > -k$.

Nun ist $b = 2{\cdot}1$, $a = 2{\cdot}0$, $\frac{f(b)}{f_1(b)} = \frac{0{\cdot}061}{11{\cdot}23} = 0{\cdot}00 \ldots.$ zu entwickeln bis zur $2n+k = 2$ten Stelle. Also $b' = 2{\cdot}1 - 0{\cdot}00 \ldots$, also $b' < 2{\cdot}1 - 0{\cdot}01 = 2{\cdot}09$ und dies ist jedenfalls auf $\frac{1}{100}$ genau.

Da $f(2) = -1$, $f(2{\cdot}09) = -0{\cdot}05$, so ist nun 2·09 noch unter der Wurzel. $2{\cdot}1 - 0{\cdot}00 = 2{\cdot}10$ ist aber über derselben. Da jetzt, wenn $b' = 2{\cdot}10$, $a' = 2{\cdot}09$, $b' - a' = 0{\cdot}01$, also $n = 2$, k mindestens 0 ist, so ist $n > -k$, also kann man jedenfalls zur $2n + k = 4$ten Stelle gehen.

$$\frac{f(2{\cdot}1)}{f_1(2{\cdot}1)} = \frac{0{\cdot}061}{11{\cdot}23} = 0{\cdot}0054, \text{ also } b'' = 2{\cdot}10 - 0{\cdot}0054,$$

d. h. $b'' < 2{\cdot}10 - 0{\cdot}0055 = 2{\cdot}0945$ genau auf 0·0001. Da $f(2{\cdot}0945) = -0{\cdot}00057$, so ist 2·0945 kleiner als die Wurzel, also 2·0946

größer. $b'' = 2{\cdot}0946$ und $a'' = 2{\cdot}0945$ gesetzt, ist $d'' = 0{\cdot}0001$, also $n = 4$, k wieder mindestens 0, also kann man bis zur $2n + k = 8$ten Stelle gehen.

$$\frac{f(2{\cdot}0946)}{f_1(2{\cdot}0946)} = \frac{0{\cdot}00054155\ldots}{11{\cdot}16204748} = 0{\cdot}0000851.$$

Demnach $b''' < 2{\cdot}0946 - 0{\cdot}00004852 = 2{\cdot}09455148$, genau auf $\left(\frac{1}{10}\right)^8$.

Da $f(2{\cdot}09455148) = -0{\cdot}00\ldots$, so ist $2{\cdot}09455148$ kleiner als die Wurzel, und also $2{\cdot}09455149$ größer. $n = 8$, also kann man zur 16ten Stelle gehen.

$$\frac{f(2{\cdot}09455149)}{f_1(2{\cdot}09455149)} = 0{\cdot}0000000084576734,$$

also ist $2{\cdot}09455149 - 0{\cdot}0000000084576735 = 2{\cdot}0945514815423265$ auf $\left(\frac{1}{10}\right)^{16}$ genau die Wurzel, welche also zwischen

$$2{\cdot}0945514815423265 \text{ und } 2{\cdot}0945514815423266$$

liegt.

Inhaltsverzeichniß.

Erste Abtheilung.

Seite

Zweite Abtheilung.

Anhang.